VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

JIŘÍ VALA

MATEMATIKA

MODUL 2

LINEÁRNÍ PROSTORY A OPERÁTORY

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Obsah

0 Úvod

Název tohoto učebního textu se může zdát poněkud zavádějící: přinejmenším ze skript [8] už totiž známe základní metody a přístupy lineární algebry, a vyzradíme-li navíc, že v matematické literatuře se běžně jako synonyma používají pojmy „lineární prostor“ a „vektorový prostor“, mohli bychom snad očekávat, že se nyní (aspoň po teoretické stránce) nedozvíme mnoho nového, poněvadž (takzvaný aritmetický) vektor můžeme definovat jako zvláštní matici, (tedy obdélníkové schéma, sestávajícími z reálných čísel), o jednom sloupci (nebo řádku). Bylo by ovšem hrubě zjednodušující se domnívat, že nyní stačí jen přisoudit pojmu vektoru (zřejmě o třech složkách) geometrický význam, vyšetřit jeho některé vlastnosti a závěry (již v navazujícím učebním textu) aplikovat na zkoumání lineárních geometrických objektů (bodů, přímek, rovin atd.) v trojrozměrném euklidovském prostoru.

0.1 Cíle

Posláním tohoto učebního textu je ukázat, že pojem vektoru lze chápat v daleko obecnějším smyslu – např. v dnes již klasické učebnici [7], určené „posluchačům vysokých škol technického směru“, se vektorem rozumí jakýkoliv prvek tzv. vektorového (lineárního) prostoru, tj. množiny jistých objektů, opatřené aritmetickými operacemi vzájemného sčítání a násobení reálnou konstantou, vyhovující určitým předepsaným požadavkům. Tato abstrakce není samoúčelná – její význam spíše s časem narůstá, tak jak se s rozvojem technických věd, teoretické i aplikované matematiky i počítačového hardwaru a softwaru stává realističtějším věrohodný korektní matematický (nejen zjednodušený empirický) popis stále složitějších jevů a procesů v přírodě i v technické praxi. V zájmu odstranění dvojakosti pojmenování však (na rozdíl od [7]) budeme v tomto učebním textu, půjde-li o zkoumání takových obecných objektů, hovořit o „lineárním prostoru“, resp. o „prvku lineárního prostoru“, a pojem „vektor“ skutečně ponecháme pro uspořádanou množinu sestávající z konečného počtu reálných čísel. Budeme se také snažit minimalizovat počet a duplicitu nově zaváděných pojmů: budeme např. důsledně mluvit o „vlastních číslech“ a „vlastních vektorech“ reálných čtvercových matic, i když se často v literatuře, mj. i v [8], ve stejném smyslu píše i o „charakteristických číslech“ a „charakteristických vektorech“).

0.2 Požadované znalosti

Celý učební text je napsán tak, aby byl srozumitelný pro studenty s běžnými středoškolskými znalostmi matematiky; navíc se předpokládá jedině znalost pojmů a základních vět z prvních 4 kapitol [8], např. Frobeniovy věty o řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic. Zcela se nepodařilo vyhnout problematice vlastností reálných funkcí jedné reálné proměnné, které se daleko podrobněji věnuje [10]; výklad (i za cenu některých vágních formulací a prezentace nedokazovaných tvrzení) je však zásadně veden tak, aby byl srozumitelný i bez hlubších znalostí teorie funkcí, resp. jejich diferenciálního a integrálního počtu. Při případném pozdějším studiu např. polynomických funkcí však bude užitečné si uvědomit, jak tzv. Hornerovo schéma pro výpočet funkčních hodnot může být užitečné při řešení algebraické rovnice obecného přirozeného stupně, ke které zpravidla vede problém nalezení tzv. vlastních čísel a vektorů reálné čtvercové matice. Zájemcům o hlubší pochopení této problematiky je možno doporučit klasickou knihu [5], která byla vydána jako součást populární ediční řady „Teoretická knižnice inženýra“. Další studium by se také mělo zaměřit na zaplnění mezery mezi jednoduchými instruktivními příklady (zvládnutelnými vesměs jen s tužkou a papírem), vyskytujícími se v tomto učebním textu, a skutečnými úlohami generovanými technickou praxí (mnohem většího rozsahu, vyžadujícími optimální nasazení vhodné výpočetní techniky); přes svou letitost k tomu může svým přehledem efektivních výpočtových algoritmů účinně napomoci učebnice [9] (pochopitelně s přihlédnutím k vývoji počítačového hardwaru i softwaru uplynulých desetiletí). S vybranými numerickými algoritmy (např. s iteračními metodami pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic a s mocninnou metodou pro výpočet vlastních čísel a vektorů reálných čtvercových matic) se lze také seznámit ve skriptech [2]. Poznamenejme, že některé podklady pro samostatné studium (domácí i zahraniční) jsou volně k dispozici i v elektronické podobě, často však vyžadují hlubší předběžné (nejen jazykové) znalosti a schopnosti orientace v různých partiích matematiky (srov. [6]) případně se (jako např. [11]) tématicky překrývají s naším učebním textem jen částečně. Z klasických tištěných učebnic, opakovaně vydávaných (a proto poměrně dostupných), prověřených v podmínkách FAST několika generacemi studentů, zmiňme aspoň [4] a [12]. Rozsáhlou zásobu zadání běžných typů příkladů k procvičování (podrobně neřešených, pouze doplněných správnými výsledky), zpracovanou kolektivem učitelů FAST VUT, obsahují skripta [3].

0.3 Doba potřebná ke studiu

Pro studium lineárních prostorů a operátorů je v současném učebním plánu řádného studia na FAST VUT v Brně vyhrazeno celkem 8 hodin pří mé výuky, z toho 4 hodiny přednášek a 4 hodiny cvičení. Vzhledem k rozsahu problematiky a k jejímu uplatnění v navazujících modulech předmětu „Matematika“ i v odborných předmětech stavební ho inženýrství se přitom spoléhá na vlastní přípravu každého studenta, jejíž časová náročnost je individuální, souvisíc s předběžnými znalostmi středoškolské matematiky i rozvíjením schopnosti logické ho myšlení. To ještě ve větší míře platí pro studenty kombinované formy studia. Přes snahu autorpřístupnost výkladu není tento text lehkým čtením – nejde zde totiž primárně o zvládnutí balíku faktografických znalostí ani souhrnu algoritmů, které lze během další ho studia postupně bez následků zapomínat, ale o osvojení tvořivého přístupu k technickým problémš využitím moderních matematických prostředků.

0.4 Klíčová slova

Klíčová slova: lineární prostor a podprostor, lineární závislost, báze, dimenze, souřadnice, norma, aritmetický a geometrický vektor, skalární součin, lineární operátor, vlastní číslo matice, vlastní vektor matice.

Vraťme se nyní (po několika informativních a názvoslovných poznámkách) k vlastní problematice tohoto učebního textu. V dosavadním studiu matematiky jsme se setkali s řadou množin, na nichž byly definovány nějaké operace, přičemž výsledkem těchto operací byly prvky stejné množiny. Tak již pravděpodobně od první třídy základní školy jsme studovali množinu všech reálných (nejprve celých, později i racionálních a jiných) čísel R s binárními operacemi sčítání a odčítání, s unární operací změny znaménka a postupně i s binárními operacemi násobení a dělení (jen dělení nulou bylo zakázáno). Posléze jsme zjistili, že obdobné operace lze provádět nejen s reálnými čísly, ale i s reálnými funkcemi reálných proměnných na celém jejich definičním oboru. Jiné zobecnění představoval přechod od operací na množině R k operacím na množině všech komplexních čísel C (bez jejichž znalosti bychom nebyli schopni vyřešit např. ani kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty). Díky prostudování [8] umíme pracovat s maticemi, sestávajícími z čísel z R, o jistém přirozeném počtu m řádků a n sloupců; množinu všech takových schémat pro nějaká $m, n \in N$, kde $N = \{1, 2, \ldots\}$ (symbol N vyhradíme pro množinu všech přirozených čísel), označme $R^{m \times n}$.

Pro $m, n \in N$ mějme nejprve matice $A, B \in R^{m \times n}$. Bez potíží dokážeme určit jejich součet $C = A + B \in R^{m \times n}$. Totéž platí o rozdílu A a B, případně o násobení kterékoliv z těchto matic libovolným reálným číslem. Obtíže nastávají v případě, chceme-li A násobit B: evidentně by muselo platit $m = n$, tj. obě matice by musely být čtvercové, a navíc obecně $A.B \neq B.A$. Pokud bychom chtěli konstruovat např. k matici A matici inverzní (čímž se zpravidla obchází chybějící operace dělení při počítání s maticemi), musela by matice A být navíc regulární (čili $\det A \neq 0$). Vidíme tedy, že analogie s počítáním s reálnými čísly funguje jen u operací sčítání matic a násobení matic čísly z R (o odčítání už nemusíme mluvit zvlášť, poněvadž rozdíl $A - B$ lze interpretovat jako součet matic A a $-1.B$). Všimněme si také, že pro libovolnou matici A o $n = 1$ sloupci (pro kterou se používá speciální název „sloupcový vektor“), můžeme vždy sestavit součin $A^T.A$, jehož výsledkem je pouhé číslo z R (totéž by pochopitelně bylo možné pro $B.B^T$ a „řádkový vektor“ čili matici B o $m = 1$ řádku); tuto myšlenku uplatníme v definici tzv. skalárního součinu.

Naznačené operace bude zřejmě možno zavést i na velmi obecných množinách. Jednotný matematický aparát nám následně umožní i jednotný přístup k různým problémům matematickým, fyzikálním i motivovaným potřebami technické praxe, bez něhož není mj. možné vytvářet ani tvůrčím způsobem využívat moderní softwarové nástroje pro analýzu vlastností, navrhování a posuzování stavebních konstrukcí.

1 Pojem lineárního prostoru a podprostoru

Doposud jsme se v praxi (i když jsme to explicitně nezdůrazňovali) seznámili s řadou lineárních prostorů, např. s již citovanými prostory R, C nebo $R^{m\times n}$ ($m,n \in N$). Nyní zavedeme obecnější pojem lineárního prostoru a jeho podprostoru, založený na vlastnostech operací vzájemného sčítání prvků a násobení prvků reálnou konstantou.

Definice 1.1: Množinu L, na které lze zavést operace $+$ (sčítání) a . (násobení číslem z R), nazveme **lineárním prostorem**, právě když pro libovolné prvky $u, v, w \in L$ a pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in R$ jsou splněny následující požadavky:

a) uzavřenosti množiny L vzhledem k uvedeným operacím: $u+v \in L$ a $\alpha.u \in L$,

b) komutativnosti sčítání: $u + v = v + u$,

c) asociativnosti sčítání: $(u + v) + w = u + (v + w)$,

d) existence nulového prvku při sčítání: existuje takový prvek $o \in L$, že $u+o = u$,

e) existence inverzního prvku při sčítání: existuje takový prvek $-u \in L$, že $u + (-u) = o$,

f) asociativnosti násobení reálným číslem: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha.\beta).u$,

g) distributivnosti součtů prvků z R vzhledem k násobení prvkem z L: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$,

h) distributivnosti součtů prvků z L vzhledem k násobení prvkem z R: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$,

i) existence jednotky pro násobení reálným číslem: : $1.u = u$.

Abychom se přesvědčili, že předchozí definice zahrnuje i užitečné prostory různé od těch, které jsme již zmiňovali, uvažujme množinu P^n všech reálných polynomických funkcí jediné proměnné $x \in R$ stupně nejvýše $n \in N$, tj. funkcí, které lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1.x + \ldots + a_n.x^n$$

pro nějaké součinitele $a_0, \ldots, a_n \in R$. Operaci + lze zavést snadno zvlášť pro každé pevné $x \in R$: $f(x) + g(x)$ je pro libovolnou dvojici funkcí $f, g \in P^n$ jen obyčejné sčítání reálných čísel. Stejné zdůvodnění můžeme uplatnit i v případě operace . a součinu $\alpha.f$. Ověřování vlastností a) až i) pak degeneruje ve snadné ověřování týchž vlastností pro prvky R.

Jiným často používaným příkladem lineárního prostoru je množina S všech posloupností $(b_1, b_2, \ldots)$ sestávajících z nekonečně mnoha reálných čísel $b_1, b_2, \ldots$ s obvyklým součtem posloupností a násobením posloupnosti reálným číslem. Snadno se přesvědčíme, že za nulový prvek S musíme volit posloupnost $(0, 0, \ldots)$. Obdobně v prostoru $R^{m \times n}$ tvoří prvek o nulová matice o m řádcích a n sloupcích. Symbolem o bude i nadále vyhrazen (už bez explicitního zdůrazňování) pro nulový prvek jakéhokoliv lineárního prostoru L.

Definice 1.2: Neprázdnou množinu M nazveme **podprostorem** lineárního prostoru L, právě když platí $u + v \in M$ a $\alpha.u \in M$ pro každé $u, v \in M$ a $\alpha \in R$ (tj. je-li požadavek a) splněn zvlášť pro množinu M namísto L).

Pro ilustraci této definice uvažujme v S množinu S_a všech aritmetických posloupností (tj. posloupností $(b, b + c, b + 2.c, \ldots)$ pro nějaká $b, c \in R$) a množinu S_g všech geometrických posloupností (tj. posloupností $(b, b.c, b.c^2, \ldots)$ pro nějaká $b, c \in R$). Jejich vlastnosti budeme zkoumat v následujícím příkladu.

Příklad 1.1: Zjistěte, tvoří-li množiny S_a a S_g podprostory lineárního prostoru S.

Řešení: Zabývejme se nejprve množinou S_a. Uvažujme v ní jakékoliv dvě posloupnosti $(b_1, b_1 + c_1, b_1 + 2.c_1, \ldots)$ a $(b_2, b_2 + c_2, b_2 + 2.c_2, \ldots)$ s $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$. Jejich součtem je posloupnost $(b, b + c, b + 2.c, \ldots)$ s $b = b_1 + b_2$ a $c = c_1 + c_2$, která patří opět do S_a. Ještě jednodušší je ověřit, že reálný násobek posloupnosti z S_a je opět posloupnost z S_a. S_a tedy tvoří podprostor S. Vyslovme hypotézu, že také S_g tvoří podprostor S. Mějme nyní speciální posloupnosti z S_g $(1, 1, 1, \ldots)$ a $(1, 2, 2^2, \ldots)$. Jejich součtem je posloupnost $(1 + 1, 1 + 2, 1 + 4, \ldots)$. Patří-li tato posloupnost S_g, musí ji být možno vyjádřit ve tvaru $(b, b.c, b.c^2, \ldots)$ pro nějaká $b, c \in R$; musí tedy mj. platit

$$1 + 1 = b\,, \quad 1 + 2 = b.c\,, \quad 1 + 4 = b.c^2\,.$$

Poněvadž podle první rovnice $b = 2$, dostáváme ze druhé rovnice následně $c = 3/2$ a ze třetí poté nesprávný výsledek $5 = 3^2/2$. Naše hypotéza byla chybná: S_g netvoří podprostor S.

V tomto učebním textu se budeme zanedlouho podrobněji zabývat analytickou geometrií v prostoru R^3, tedy v onom prostoru, se kterým převážně pracuje deskriptivní geometrie. Předem si už můžeme uvědomit, že celý prostor R^3 je sám sobě také podprostorem, ale že (z praktického hlediska především) tvoří podprostory R^3 též roviny a přímky (nikoliv však obecnější čáry nebo plochy) v libovolných polohách.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 1.2: Rozhodněte, zda množina $\tilde{P}^3$ všech funkcí $f \in P^3$ vlastnosti $f(x) = f(-x)$ pro každé $x \in R$ (tj. množina všech sudých polynomických funkcí nejvýše třetího stupně) tvoří podprostor P^3.

Výsledek: Tvoří.

Příklad 1.3: Zjistěte, zůstane-li výsledek předešlého příkladu v platnosti, definujeme-li sčítání v P^n pro libovolné funkce $f, g \in P^n$ a jejich součet $h \in P^n$ pro každé $x \in R$ předpisem

$$h(x) = \alpha.f(x) + \beta.g(x)\,,$$

v němž α a β jsou předem zvolená navzájem různá reálná čísla.

Výsledek: Nezůstane.

2 Lineární závislost a nezávislost

Samotný pojem lineárního prostoru (resp. podprostoru) v sobě nezahrnuje žádnou informaci, zda a jak jsou prvky příslušného prostoru vzájemně závislé, případně jaký počet (a v jakém smyslu) nezávislých prvků lze v prostoru nalézt. Tento nedostatek nám pomohou odstranit následující definice.

Definice 2.1: Prvky $u_1, \ldots, u_n$, kde $n \in N$, lineárního prostoru L nazveme **lineárně závislými**, právě když existují taková čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, že

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_n u_n = o\,.$$

Prvky $u_1, \ldots, u_n$, kde $n \in N$, lineárního prostoru L nazveme **lineárně nezávislými**, právě když nejsou lineárně závislé.

Definice 2.2: Prvek v lineárního prostoru L nazveme **lineární kombinací** prvků $u_1, \ldots, u_n \in L$, kde $n \in N$, právě když existují taková čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, že

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_n u_n = v\,.$$

K pochopení významu těchto definic i způsobu ověřování jejich předpokladů snad přispějí tři následujících příklady, ve kterých budeme pracovat s již zavedenými prostory R^3, $R^{2\times 2}$ a P^2.

Příklad 2.1: Ověřte, jsou-li vektory $u = [1,2,3]^T$, $v = [3,1,0]^T$ a $w =$

$[5, 5, 6]^T$ lineárně nezávislé v R^3. Jsou-li naopak lineárně závislé, vyjádřete w jako lineární kombinaci u a v.

Řešení: Hledejme takové součinitele α_1, α_2 a α_3, aby platilo

$$\alpha_1.u + \alpha_2.v + \alpha_3.w = o\,;$$

zde $o = [0, 0, 0]^T$. Tuto rovnici (formálně jedinou, ve skutečnosti však reprezentující soustavu 3 lineárních algebraických rovnic o 3 neznámých α_1, α_2 a α_3) můžeme po dosazení složek vektorů u, v a w přepsat v přívětivějším maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že transpozice v zadání vektorů u, v a w (a následně při chápání nulového vektoru o) je zde nepodstatná – prostor R^3 má stejné vlastnosti, ať jeho prvky chápeme jako vektory řádkové či sloupcové. Dostáváme homogenní soustavu, která má vždy triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Musíme zkoumat, má-li i nějaké jiné řešení. Gaussovou eliminací vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Zvolíme-li libovolné $\alpha_3 = t \in R$, dostáváme postupně $\alpha_2 = -9.t/5$ a $\alpha_1 = -3.t - 2.(-9.t/5) = 3.t/5$. Vektory u, v a w jsou tedy lineárně závislé a (zvolíme-li např. $t = 5$) platí

$$3.u - 9.v + 5.w = o$$

neboli

$$w = \frac{9}{5} \cdot v - \frac{3}{5} \cdot u\,.$$

Příklad 2.2: Ověřte, že matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé v $R^{2\times 2}$.

Řešení: Stačí ukázat, že maticová rovnice

$$\alpha_1.A + \alpha_2.B + \alpha_3.C + \alpha_4.D = o\,,$$

v níž o je nulová matice o dvou řádcích i sloupcích, má jediné řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_3 = 0$. Tuto rovnici lze evidentně (rozepisujeme-li ji pro jednotlivé prvky matic A, B, C a D na odpovídajících pozicích v obou řádcích a sloupcích) formulovat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Determinant matice této soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 12 - 3 = -2 \neq 0 .$$

Soustava je regulární, a nemůže mít tedy jiné řešení než uvedené triviální řešení.

Příklad 2.3: Ze čtveřice funkcí f_0, f_1, f_2, f_3 zavedených pro každé $x \in R$ vztahy

$$f_0(x) = 1 , \quad f_1(x) = 1 + x , \quad f_2(x) = x^2 , \quad f_3(x) = 1 + x + 2.x^2$$

vyberte libovolným způsobem tři funkce lineárně nezávislé v P^3 a vyjádřete, je-li to možné, jako jejich lineární kombinace v P^3 funkce φ a ψ předepsané pro každé $x \in R$ vztahy

$$\varphi(x) = x^3 , \quad \psi(x) = -1 - 3.x + 4.x^2 .$$

Řešení: Úloha není zřejmě zadána jednoznačně; nejsnazší by mělo být vyloučit z dalších úvah funkci $f_3 = f_1 + 2.f_2$. Musíme však ještě ověřit, že funkce f_0, f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme opak: existují tedy takové reálné koeficienty α_0, α_1 a α_2 (jejichž pořadová čísla jsme přizpůsobili pořadovým číslům zadaných funkcí), z nichž aspoň jeden je nenulový, že

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = o ;$$

o je zde funkce, jež vrací číslo 0 pro každé reálné x. Volíme-li postupně $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$, obdržíme soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Determinant matice této soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.0 = 2 \neq 0 .$$

Tím však dospíváme ke sporu – matice soustavy je regulární, takže soustava má pouze triviální řešení $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, které jsme předem vyloučili. Zbývá ještě (je-li to možné) vyjádřit φ a ψ jako lineární kombinaci f_0, f_1 a f_2. Pokusme se o to současně pro φ i pro ψ: stačí nalézt nějaké takové reálné součinitele β_0, β_1 a β_2, resp. γ_0, γ_1 a γ_2, aby platilo

$$\varphi = \beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \,, \qquad \psi = \gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 \,.$$

Volíme-li postupně $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ a $x = 2$, obdržíme soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix},$$

resp. soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Gaussovou eliminací vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nepravdivý závěr $6 = 0$ v posledním řádku nás v prvním případě informuje, že φ nelze v P^3 získat jako lineární kombinaci f_0, f_1 a f_2. I ve druhém případě musíme být obezřetní: poslední rovnice sice vypadne a z prvních tří dostáváme postupně $\gamma_2 = 4$, $\gamma_1 = -3$ a $\gamma_0 = 2$, není však ještě zcela jasné, že pro jinou volbu x bychom neskončili stejně jako v prvním případě. Zdá se však, že $\psi = 2.f_0 - 3.f_1 + 4.f_2$. Dosadíme-li sem za ψ, f_0, f_1 a f_2, dostáváme identitu

$$-1 - 3.x + 4.x^2 = 2 - 3.(1 + x) + 4.x^2$$

pro libovolné $x \in R$; ψ lze tedy skutečně popsaným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci f_0, f_1 a f_2 v P^3.

V posledním příkladě jsme se propracovávali k výsledkům poměrně komplikovanými výpočty. Kdybychom měli k dispozici více informací o vlastnostech prostoru P^2, mohli bychom na ně odkazovat a většinu odvození vynechávat. Získáváme tak motivaci k hlubšímu zkoumání vlastností prakticky užitečných speciálních tříd funkcí (zde konkrétně polynomických), na které se zaměříme později.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 2.4: Najděte všechny takové reálné parametry α, pro něž jsou vektory $u = [1, 2, 4, 1]^T$, $v = [4, 2, 1, 1]^T$ a $w = [1, \alpha, 1, 2/5]^T$ lineárně závislé v R^4.

Výsledek: Jediným řešením je $\alpha = 4/5$.

Příklad 2.5: V R^4 jsou dány lineárně nezávislé vektory a, b a c. Zjistěte, jsou-li vektory u, v a w zadané předpisem

$$u = 2.a - 3.b\,, \quad v = 3.u - b + c\,, \quad w = u + v + a - 2.c$$

lineárně závislé.

Výsledek: Nejsou.

3 Báze a dimenze lineárního prostoru, určování souřadnic

Při studiu lineární závislosti a nezávislosti v lineárním prostoru L jsme si zatím (obecně ani v konkrétních příkladech) nesnažili položit otázku, kolik lineárně nezávislých prvků prostoru L je třeba zvolit, aby již bylo možno libovolný prvek prostoru L určit jako jejich lineární kombinaci. Na tuto problematiku se soustřeďují následující definice.

Definice 3.1: Množinu všech prvků lineárního prostoru L, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků nějaké uspořádané množiny G, nazveme **lineárním obalem** prostoru L. Uspořádanou množinu G nazveme **bází** prostoru L, právě když jsou všechny prvky množiny G lineárně nezávislé v prostoru L a současně je lineární obal množiny G totožný s celým prostorem L. Počet prvků báze nazveme **dimenzí** prostoru L.

V předchozí definici se často vynechává předpoklad, že množina G je uspořádaná. V našich úvahách však budeme (hlavně pro zvýšení srozumitelnosti) vždy dodržovat pořadí prvků této množiny: typicky přitom bude $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ pro prostor dimenze větší nebo rovné $n \in N$, přičemž $g_1, \dots, g_n$ jsou nějaké prvky L. Všimněme si rovněž, že definice lineárního obalu je záměrně formulována tak, aby lineární obal každé uspořádané množiny G byl již automaticky podprostorem L (obsahuje totiž vzájemné součty všech svých prvků i jejich reálné násobky). Praktická konstrukce báze v jednoduchém prostoru konečné dimenze bude zřejmá z následujícího příkladu.

Příklad 3.1: Dokažte, že množina všech diagonálních matic $R_D^{2\times 2}$ tvoří podprostor prostoru $R^{2\times 2}$. Najděte nějakou bázi tohoto podprostoru a stanovte jeho dimenzi.

Řešení: Libovolnou matici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

která sestává z 2×2 reálných čísel a_{11}, a_{12}, a_{21} a a_{22}, můžeme zapsat ve tvaru

$$A = a_{11}.B_{11} + a_{12}.B_{12} + a_{21}.B_{21} + a_{22}.B_{22},$$

kde

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množinu $\{B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}\}$ tak můžeme prohlásit za bázi prostoru $R^{2\times 2}$. Libovolnou diagonální matici

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

v $R^{2\times 2}$ můžeme potom analogicky zapsat v ještě jednodušším tvaru

$$D = a_{11}.B_{11} + a_{22}.B_{22}.$$

Prostor $R_D^{2\times 2}$ zde vzniká jako lineární obal množiny $G = \{B_{11}, B_{22}\}$, a je tedy nutně podprostorem $R^{2\times 2}$; množina G zůstává přitom bází prostoru $R_D^{2\times 2}$. Zatímco dimenze $R^{2\times 2}$ je 4, dimenze $R_D^{2\times 2}$ je pouze 2.

Dimenze (v českém textu často také „rozměr“) je zdánlivě jen pomocným pojmem pro stručné označení počtu prvků báze. Tento pojem má ovšem rozsáhlé uplatnění v matematice i v aplikačních disciplínách. Pro jakékoliv přirozené číslo n mají prostory R^n i P^n evidentně stejnou dimenzi n. Zvolíme-li ještě další přirozené číslo m, vidíme (ze snadného zobecnění předchozího příkladu), že prostor $R^{m\times n}$ má dimenzi $m.n$. Označme nyní P prostor všech reálných polynomických funkcí jediné proměnné $x \in R$ libovolného přirozeného stupně. Pro každé přirozené $n > 1$ je zřejmě $P_1 \subset P_n \subset P$; jednou z možných bází prostoru P_n je přitom $G = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, kde

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad \ldots, \quad f_n(x) = x^n$$

pro každé $x \in R$. Funkce f_{n+1} definovaná předpisem

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1}$$

pro každé $x \in R$ není ovšem nikdy lineární kombinací prvků báze G. Dimenze prostoru P není tedy konečná. Tato vlastnost je typická pro prostory funkcí (i obecnějších zobrazení). Reálné problémy technické praxe vedou většinou k formulaci nějakých diferenciálních nebo integrálních rovnic (případně jejich soustav), jejichž řešení ve vhodném prostoru funkcí nekonečné dimenze je přesně známo jen u nevelkého množství jednoduchých modelových (oproti realitě zpravidla hrubě zjednodušených) úloh – např. v Kirchhoffově ohybové teorii nosníků nebo u vedení tepla v jediném směru. Zpravidla se namísto přesného řešení hledá v nějakých podprostorech konečné dimenze zmiňovaného prostoru nekonečné dimenze posloupnost přibližných řešení původního problému. Přitom se věří (a ve šťastnějších případech i umí dokázat), že přesnost výsledků se zvyšuje s rostoucí dimenzí podprostoru: např. u výpočtu průhybu nosníků vlivem příčného zatížení (pokud bychom neuměli nebo nechtěli hledat přesné řešení) bychom si to dokázali aspoň kvalitativně představit jako nahrazování průhybové křivky lomenou čarou, sestávající z konečného (stále se zvyšujícího) počtu úseček. Analýza takových problémů ovšem vyžaduje hlubší znalosti diferenciálního a integrálního počtu.

Prvky lineárního prostoru je užitečné jednoznačně popisovat ve vztahu k jeho bázi. Za tím účelem se zavádí pojem souřadnic; zde se omezíme (s ohledem na bezprostřední aplikace) pouze na případ, že lineární prostor je konečné dimenze.

Definice 3.2: V lineárním prostoru L dimenze $n \in N$ nazveme uspořádanou n-tici reálných čísel $(v_1, \ldots, v_n)$ **souřadnicemi** prvku $v \in L$ vzhledem k bázi $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ prostoru L, právě když

$$v = v_1.g_1 + \ldots + v_n.g_n\,.$$

Přesvědčme se o tom, že souřadnice prvku v jsou touto definicí určeny jednoznačně. Předpokládejme opak: je tedy také

$$v = w_1.g_1 + \ldots + w_n.g_n$$

pro nějaké souřadnice $(w_1, \ldots, w_n)$ prvku v vzhledem k téže bázi G. Z porovnání obou vyjádření v je zřejmé, že musí platit

$$o = (v_1 - w_1).g_1 + \ldots + (v_n - w_n).g_n\,.$$

Poněvadž prvky báze G jsou v prostoru V lineárně nezávislé, dospíváme ihned ke sporu

$$v_1 = w_1\,, \quad \ldots\,, \quad v_n = w_n\,.$$

V prostorech R^n s přirozeným n je dobrým zvykem pracovat s velmi speciální bází $E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kde

$$e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T\,, \quad e_2 = [0, 1, \ldots, 0]^T\,, \quad \ldots\,,$$

$$e_{n-1} = [0, 0, \ldots, 1, 0]^T\,, \quad e_n = [0, 0, \ldots, 0, 1]^T\,.$$

Souřadnice vzhledem k této bázi bývají tradičně nazývány „kartézskými“.

Příklad 3.2: Prvek $v \in R^4$ je určen souřadnicemi $(1, 0, 1, 2)$ vzhledem k bázi $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, kde

$$g_1 = [1, 0, 1, 0]^T, \quad g_2 = [0, 1, 0, 1]^T, \quad g_3 = [1, 2, 0, 1]^T, \quad g_4 = [0, 0, 1, 2]^T.$$

Najděte jednak souřadnice (v_1, v_2, v_3, v_4) prvku v vzhledem k bázi E_4, jednak souřadnice (w_1, w_2, w_3, w_4) téhož prvku vzhledem k bázi $B = \{e_1, g_2, e_3, g_4\}$.

Řešení: Ze soustavy (s jednotkovou maticí soustavy, za niž vděčíme speciální bázi E_4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

dostáváme okamžitě $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$ a $v_4 = 5$. Pravá strana se pro výpočet souřadnic vzhledem k bázi B nezmění. Pro soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

která ještě nemá zcela trojúhelníkovou (tím méně diagonální) matici soustavy, použijeme Gaussovu eliminaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Přímo můžeme vypočítat $w_1 = 2$, $w_3 = 3$ a $w_4 = 1$, následně též $w_2 = 1$.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 3.3: Rozhodněte, tvoří-li množina všech čtvercových reálných horních trojúhelníkových matic přirozeného řádu n podprostor $R^{n \times n}$. Pokud ano, stanovte jeho dimenzi.

Výsledek: Tvoří; dimenze je $n.(n + 1)/2$.

Příklad 3.4: Lineární prostor je zaveden jako lineární obal množiny funkcí $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ definovaných předpisem

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(2.x), \quad f_3(x) = \cos(3.x), \quad \ldots$$

pro všechna $x \in R$. Zjistěte, patří-li do něho funkce φ, ψ a ω definované pro všechna $x \in R$ předpisem

$$\varphi(x) = \cos^2 x - \sin^2 x\,, \quad \psi(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{7.x}{2}\,, \quad \omega(x) = \sin \frac{x}{2}\,.$$

Výsledek: Pouze φ a ψ (podle známých trigonometrických vzorců).

4 Norma v lineárním prostoru, normy reálných vektorů a matic

Ve všech úvahách a výpočtech jsme se dosud zarputile vyhýbali tomu, abychom prvkům lineárního prostoru přisuzovali nějakou délku či velikost. Existují smysluplné příklady lineárních prostorů, v nichž to skutečně není možné nebo potřebné, v tomto učebním textu se však jimi nebudeme zabývat. Při počítání s čísly z R nebo z C nicméně rozumíme pojmu „absolutní hodnota“ (a pro libovolné reálné nebo komplexní číslo α pro ni používáme označení $|\alpha|$), z elementární vektorové algebry v R^2 zase známe pojem „délka vektoru“. Způsob zavedení obdobného pojmu v dostatečně obecném lineárním prostoru umožňuje následující definice.

Definice 4.1: Lineární prostor L nazveme **lineárním normovaným prostorem**, právě když ke každému prvku $u \in L$ existuje takové nezáporné reálné číslo $||u||$ (tzv. **norma** prvku u v prostoru L), že pro libovolné prvky $u, v \in L$ a jakékoliv číslo $\alpha \in R$ platí:

a) $||u|| = 0$, právě když $u = o$,

b) $||\alpha.u|| = |\alpha|.||u||$,

c) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Následující příklad ukazuje, jakým způsobem lze v konkrétním případě rozhodnout, že nějaké konkrétní přiřazení nezáporného reálného čísla každému prvku lineárního prostoru skutečně vyhovuje požadavkům z předchozí definice. Zatímco splnění požadavků a) a b) bývá často jen záležitostí rutinních algebraických úprav, ověření požadavku c), známého jako „trojúhelníková nerovnost“ (původ tohoto názvu si vysvětlíme později, až se budeme věnovat geometrické interpretaci vektorů v R^n) může vyžadovat i znalost méně obvyklé důkazové techniky.

Příklad 4.1: Zjistěte, jakým způsobem je třeba zvolit nezáporná reálná čísla $\rho_1, \dots, \rho_n$, aby předpisem

$$||u|| = \sqrt{\rho_1 u_1^2 + \dots \rho_n u_n^2}$$

pro každé $u = [u_1, \ldots, u_n]^T$ bylo možno z prostoru R^n, kde $n \in N$, vytvořit normovaný lineární prostor.

Řešení: Připusťme $\rho_1 = 0$, $u_1 = 1$ a $u_2 = \ldots u_n = 0$. Vidíme, že $u \neq o$, ale $||u|| = 0$, což je v rozporu s definičním požadavkem a). Opakováním této argumentace (postupně s nulovým $\rho_2, \ldots, \rho_n$) dospíváme k závěru, že všechna čísla $\rho_1, \ldots, \rho_n$ musejí být kladná. Pak jsou již bez problémů pravdivé obě implikace

$$u_1 = \ldots = u_n = 0 \Rightarrow u = o\,, \quad u = o \Rightarrow u_1 = \ldots = u_n = 0\,;$$

o je zde nulový reálný vektor o n složkách. Jednoduchá algebraická úprava

$$\sqrt{\alpha^2.(\rho_1.u_1^2 + \ldots \rho_n.u_n^2)} = |\alpha|.\sqrt{\rho_1.u_1^2 + \ldots \rho_n.u_n^2}$$

potvrzuje splnění předpokladu b). Zbývá ověřit požadavek c). Zvolme libovolné reálné číslo λ. Symbolické sčítání přes všechny indexy $i \in \{1, \ldots, n\}$, které budeme používat v dalších výpočtech, by mělo přispět k úspornosti zápisu. Vyjděme z nerovnice

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.(u_i + \lambda v_i)^2 \geq 0\,,$$

která je evidentně splněna pro každé $u = [u_1, \ldots, u_n]^T$ i $v = [v_1, \ldots, v_n]^T$ z R^n. Tuto nerovnici můžeme snadno převést do tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2 + 2.\lambda.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i.v_i + \lambda^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 \geq 0\,,$$

který můžeme interpretovat jako kvadratickou nerovnici pro λ. Má-li však být tato nerovnice vždy splněna (neboli příslušná kvadratická rovnice nesmí mít žádné reálné řešení), musí být její diskriminant nekladný čili

$$\left(2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i.v_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 \leq 0\,.$$

Odtud dostaneme odhad

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i.v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2}\,,$$

který nám bude zanedlouho užitečný. Předpokládejme, že požadavek c) není pro některé $u, v \in R^n$ splněn. Pak platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.(u_i + v_i)^2}\,.$$

Na obou stranách této nerovnice jsou nezáporná čísla, můžeme ji tedy umocnit na druhou. Vychází

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 + 2.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2} < \sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 + 2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i.v_i\,.$$

Aplikujeme-li však na pravou stranu odvozený odhad, dostáváme již spor

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 + 2.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2} <$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2 + 2.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i.u_i^2.\sum_{i=1}^{n} \rho_i.v_i^2}\,.$$

Požadavek c) je tedy splněn. Shrňme: stačí zvolit všechna čísla $\rho_1, \ldots, \rho_n$ kladná.

V prostoru **reálných vektorů** $v = [v_1, \ldots, v_n]^T$, přesněji v prostoru R^n, kde $n \in N$, lze sestrojit řadu norem (nejen těch z předchozího příkladu), z nichž každá následně určuje poněkud jiný normovaný prostor, např.

$$||v|| = \max(|v_1|, \ldots, |v_n|)\,, \quad ||v|| = |v_1| + \ldots + |v_n|\,, \quad ||v|| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$

V dalším výkladu, kde budeme v R^n pracovat s normou, budeme používat poslední z uvedených norem, která se tradičně nazývá „euklidovskou normou“. Tato norma je zřejmě jednou z norem z předešlého příkladu: stačí zvolit $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 1$. V analytické geometrii v R^3 posléze zaznamenáme, že tato norma nejlépe odpovídá intuitivní představě o „délce vektoru“, navazující na „vzdálenost dvou bodů“. Následující příklad je ukázkou běžných výpočtů v R^n.

Příklad 4.2: K zadaným vektorům $u = [1, 0, 2, -2]^T$ a $v = [-1, 3, 2, 2]^T$ najděte v prostoru R^4 všechny takové vektory w, pro něž pro nějaké $\alpha \in R$ platí $w = \alpha.(u + v)$ a současně $||w||$=1.

Řešení: Máme zadány jisté vektory $u, v \in R^4$. Ze vztahu

$$1 = ||w|| = ||\alpha.(u + v)|| = |\alpha|.||u + v||$$

vidíme, že buď $u = -v$, a potom dospíváme ke sporu $1 = \alpha.0$, takže žádné řešení neexistuje, nebo $u \neq -v$, a potom je řešení dvojznačné: přípustné je jak $\alpha = ||u + v||^{-1}$, tak $\alpha = -||u + v||^{-1}$, což budeme stručně zapisovat ve formě $\alpha = \pm||u + v||^{-1}$. V našem případě je evidentně $u \neq -v$; dostáváme tedy

$$w = \pm\frac{u + v}{||u + v||}\,,$$

$u + v = [0, 3, 4, 0]^T$ a dále

$$||u + v|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,,$$

takže $w = \pm[0, 3/5, 4/5, 0]^T$.

Rovněž v prostoru **reálných matic**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

přesněji v prostoru $R^{m \times n}$, kde $m, n \in N$, lze sestrojit řadu norem, z nichž každá následně určuje poněkud jiný normovaný prostor, např.

$$||A|| = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A|| = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad ||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

V praxi se však často používá ještě důmyslněji konstruovaná norma; seznámíme se s ní v rámci výkladu o vlastních číslech reálných čtvercových matic (ačkoliv matice A obecně není čtvercová, tj. nemusí platit $m = n$). Samotný předpis, podle něhož se taková norma počítá, však bude dosti složitý (srov. příklad 7.6 včetně komentáře k němu).

Poznamenejme též, že v prostoru P^n, kde $n \in N$, nebo dokonce i v prostoru P lze zavést tzv. Čebyševovu normu

$$||f|| = \max_{x \in R} |f(x)|$$

pro libovolnou polynomickou funkci $f \in P^n$, resp. $f \in P$. Problematika konstrukce norem v prostorech funkcí (a také např. v prostoru reálných posloupností S) je ovšem obecně mnohem složitější.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 4.3: Zvažte, může-li být absolutní hodnota determinantu čtvercové matice třetího řádu alternativní normou $R^{3 \times 3}$.

Výsledek: Nemůže.

Příklad 4.4: Určete, pro které $\alpha \in R$ může být funkce φ definovaná předpisem

$$\varphi(u_1, u_2) = 2.|u_1| + (\alpha - 1).|u_2|$$

pro všechna $u_1, u_2 \in R$ alternativní normou prostoru R^2 pro libovolný vektor $u = [u_1, u_2]^T \in R^2$.

Výsledek: Pro $\alpha > 1$.

5 Geometrická interpretace reálných vektorů

Řada vlastností vektorů v lineárním normovaném prostoru L má názornou geometrickou interpretaci. Názornost pochopitelně klesá s obecností prostoru L;

zde se pro jednoduchost soustředíme pouze na prostor R^3 jako na typického reprezentanta prostorů R^n s $n \in N$. Na ilustrativních obrázcích tak mohou vždy být jen jisté kolmé průměty do vhodné roviny, nazývané v deskriptivní geometrii „průmětna", tj. vlastně do určitého prostoru reálných vektorů dimenze 2.

Jak jsme viděli už v příkladu 3.2, v kartézské soustavě splývají složky vektorů s jejich souřadnicemi. Pro geometrickou interpretaci vektorů je navíc nezbytné si uvědomit, že každému vektoru musíme nejprve přiřadit nějaké umístění, nejlépe počáteční bod. Pro libovolný vektor $u \in [u_1, u_2, u_3]^T \in R^3$ budeme používat normu

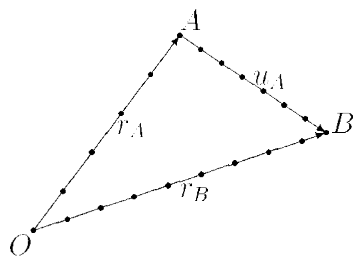
$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,;$$

skutečnost, že jsme vektor u opatřili počátečním bodem A, budeme naznačovat tak, že namísto u budeme psát u_A. Polohu bodu A v R^3 budeme přitom charakterizovat polohovým vektorem, který označíme r_A. Symbol r vyhradíme nadále pro polohové vektory, o nichž budeme důsledně předpokládat, že jejich počáteční bod je totožný s počátkem souřadnic O. Kromě počátečního bodu lze u každého vektoru zjistit i koncový bod: tak koncový bod B vektoru u_A je určen polohovým vektorem $r_B = r_A + u_A$. Zřejmě $u_A = r_B - r_A$, takže také $\|u_A\| = \|r_B - r_A\|$; to je vlastně délka úsečky AB. Z této představy vychází také často zmiňované chápání vektoru u_A jako „orientované úsečky". Je-li na obrázku, který znázorňuje kolmé průměty na půdorysnu, $r_A = [3, 4, 0]^T$ a $r_B = [6, 2, 6]^T$, je nutně $u_A = [3, -2, 6]^T$. Zřejmě je

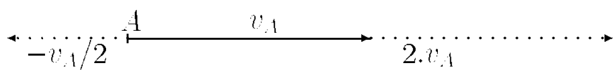
$$\|r_A\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,, \quad \|r_B\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{76}\,,$$

$$\|u_A\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = 7\,.$$

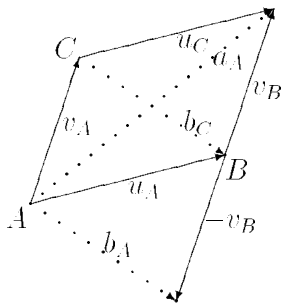
Na průmětech vektorů r_A, r_B a u_A jsou zvýrazněny úseky jednotkové délky; ve skutečné velikosti se však tyto úseky zobrazují pouze v případě vektoru r_A, jenž leží v půdorysně.



Je-li vektor v_A nenulový, patří všechny vektory $\alpha.v_A$ pro reálný součinitel α jediné přímce. Pro $\alpha > 0$ jsou vektory v_A a $\alpha.v_A$ souhlasně orientované, pro $\alpha < 0$ nesouhlasně orientované. Pro $\alpha = 0$ degeneruje vektor v_A v jediný bod A (a o orientaci nemá smysl rozhodovat). Ilustrativní obrázek ukazuje speciální případy $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ a $\alpha = -1/2$ (bez ohledu na polohu počátku souřadnic, polohu průmětny i směr promítání, stejně jako i další obrázky).



Jednoduchou geometrickou interpretaci mají součet a rozdíl vektorů: pro $a = u + v$ a $b = u - v$ ji demonstruje následující obrázek. Z něho také můžeme vidět, jak asi vzniklo tradiční pojmenování „trojúhelníková nerovnost" požadavku c) v definici 4.1: zde máme např. $\|a\| = \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$. V konkrétním případě na obrázku je ovšem nerovnost ostrá; v rovnost by se změnila jedině tehdy, byly-li by vektory u a v lineárně závislé. S lineární závislostí vektorů pracuje i následující definice, využitelná zejména v analytické geometrii.



Definice 5.1: Nenulové vektory $u_1, \ldots, u_m$, kde m je přirozené číslo, v R^3 nazveme **kolineárními**, právě když buď $m = 1$ nebo $u_2, \ldots, u_m$ jsou reálnými násobky u_1. Nenulové vektory $u_1, \ldots, u_m$, kde m je přirozené číslo větší než 1, v R^3 nazveme **komplanárními**, právě když buď $m = 2$ nebo lze vybrat takové indexy $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, že libovolný vektor u_k pro index $k \in \{1, \ldots, m\}$ různý od i a j je lineární kombinací vektorů u_i a u_j.

Formální komplikovanost druhé části předešlé definice, která zavádí pojem komplanárních vektorů, souvisí s nutností obsloužit i speciální případ, že vektory u_1 a u_2 jsou kolineární. Pokud bychom totiž tento případ předem vyloučili, stačilo by požadovat, aby vektory $u_3, \ldots, u_m$ byly lineárními kombinacemi u_1 a u_2. Hlavní poslání definice 5.1 bude zřejmé z následující úvahy, která vychází z geometrické interpretace vektorů. Mějme v R^3 bod A a nenulové vektory u, v a w. Jediný vektor u je vždy kolineární. Dva vektory u a v jsou vždy komplanární. Dva vektory u_A a v_A leží v jediné přímce, právě když u a v jsou kolineární. Tři vektory u_A, v_A a w_A leží ve stejné rovině, právě když u, v a w jsou komplanární. Tato rovina je určena jednoznačně, právě když u, v a w nejsou kolineární. Zobecnění pro větší počet vektorů je zřejmé: vektor u_A určuje vždy přímku, o níž se zjišťuje, zda jí patří ostatní vektory opatřené počátečním bodem A; nekolineární vektory u_A a v_A určují vždy rovinu, o níž se zjišťuje, zda jí patří ostatní vektory opatřené počátečním bodem A.

Příklad 5.1: Nenulové vektory a, b a c v R^3 neznáte, víte však, že nejsou komplanární. Zjistěte, pro která reálná čísla β jsou všechny tři vektory $u = a +$

$2.b + \beta.c$, $v = 4.a + 5.b + 6.c$ a $w = 7.a + 8.b + \beta^2.c$ kolineární a pro která aspoň komplanární.

Řešení: Prověřme nejprve, mohou-li být vůbec vektory u a v kolineární. Vektor u by musel být reálným násobkem vektoru v čili pro nějaké $\alpha \in R$

$$a + 2.b + \beta.c = \alpha.(4.a + 5.b + 6.c)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$(1 - 4.\alpha).a + (2 - 5.\alpha).b + (\beta - 6.\alpha).c = o\,,$$

kde $o = [0, 0, 0]^T$. Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů a, b a c musí současně platit

$$1 = 4.\alpha\,, \quad 2 = 5.\alpha\,, \quad \beta = 6.\alpha\,.$$

Z první rovnice vyplývá $\alpha = 1/4$, již ze druhé však $\alpha = 2/5$, takže třetí se už nemusíme zabývat – žádné řešení neexistuje. Vektory u a v (a tedy ani vektory u, v a w) nemohou být nikdy kolineární. Zkusíme ověřit, mohou-li být někdy aspoň vektory u, v a w komplanární. Vektor w by musel být lineární kombinací vektorů u a v čili pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

$$7.a + 8.b + \beta^2.c = \alpha_1.(a + 2.b + \beta.c) + \alpha_2.(4.a + 5.b + 6.c)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$(7 - \alpha_1 - 4.\alpha_2).a + (8 - 2.\alpha_1 - 5.\alpha_2).b + (\beta^2 - \beta.\alpha_1 - 6.\alpha_2).c = o\,.$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů a, b a c musí současně platit

$$7 = \alpha_1 + 4.\alpha_2\,, \quad 8 = 2.\alpha_1 + 5.\alpha_2\,, \quad \beta^2 = \beta.\alpha_1 + 6.\alpha_2\,.$$

Z prvních dvou rovnic lze vypočítat α_1 a α_2. Pomocí Gaussovy eliminace

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

vychází postupně $\alpha_2 = 2$ a $\alpha_1 = -1$. Dosazením těchto výsledků do dosud nepoužité třetí rovnice dostáváme pro neznámý součinitel β kvadratickou rovnici

$$\beta^2 + \beta - 12 = 0\,,$$

kterou lze snadno přepsat do tvaru

$$(\beta - 3).(\beta + 4) = 0\,.$$

Vektory u, v a w jsou tedy komplanární, právě když $\beta \in \{-4, 3\}$.

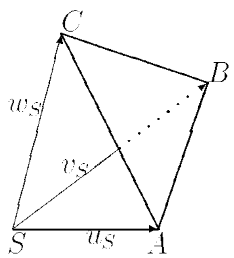
Při zavádění tzv. vektorového součinu dvou vektorů v R^3 budeme potřebovat ještě jeden pojem, který má jednoduchou geometrickou interpretaci. Poznamenejme, že definice je snadno zobecnitelná pro jakýkoliv prostor R^n s přirozenou dimenzí n; výrazně problematičtější by bylo jen vysvětlování jejího geometrického významu. K výpočtu determinantu, který v definici vystupuje, se ještě vrátíme, až budeme zavádět pojem smíšeného součinu tří vektorů. Pak uvidíme, že důležité není jen znaménko výsledku, ale i jeho číselná hodnota – i té přiřadíme užitečný geometrický význam.

Definice 5.2: Bázi $\{u, v, w\}$ prostoru R^3 nazveme **pozitivní bází** prostoru R^3, právě když pro složky vektorů $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ platí

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0\,.$$

Bázi $\{u, v, w\}$ prostoru R^3 nazveme **negativní bází** prostoru R^3, právě když pro složky vektorů $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ platí

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} < 0\,.$$



Tuto definici lze názorně interpretovat geometricky: báze $\{u, v, w\}$ je pozitivní, právě když pro pevně zvolený bod S v R^3 koncové body A, B, C vektorů při pohledu z toho poloprostoru vymezeného rovinou trojúhelníka ABC, jenž neobsahuje bod S, jsou vrcholy trojúhelníka ABC označeny v pozitivním smyslu (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček); báze $\{u, v, w\}$ je negativní, právě když pro pevně zvolený bod S v R^3 koncové body A, B, C vektorů při pohledu z toho poloprostoru vymezeného rovinou trojúhelníka ABC, jenž neobsahuje bod S, jsou vrcholy trojúhelníka ABC označeny v negativním smyslu (tj. ve směru otáčení hodinových ručiček). Na ilustrativním obrázku (na němž je tečkováním naznačena neviditelnost při pohledu na neprůhledný trojúhelník ABC z poloprostoru podle předchozího komentáře – výsledná báze $\{u, v, w\}$ je zde tedy pozitivní) můžeme bod S umístit v R^3 libovolně, aniž by to mělo nějaký vliv na pozitivnost nebo negativnost báze $\{u, v, w\}$. Požadavek, aby trojice vektorů u, v, w tvořila bázi, je přitom ekvivalentní s požadavkem, aby tato trojice vektorů nebyla komplanární. V bázi všem záleží i na uspořádání: je-li tedy $\{u, v, w\}$ pozitivní báze, jsou také $\{v, w, u\}$ a $\{w, u, v\}$ pozitivní báze, zatímco $\{v, u, w\}$, $\{u, w, v\}$, $\{w, v, u\}$ jsou negativní báze (vesměs prostoru R^3). Zejména nejfrekventovanější ortonormální báze $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ je evidentně pozitivní: odhlédneme-li už od obrázku, počítá se v tomto případě v předešlé definici jen determinant z jednotkové matice třetího řádu, který je roven 1. Negativní jsou ovšem např. ortonormální báze $\{e_1, -e_2, e_3\}$ a $\{e_2, e_1, e_3\}$.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 5.2: Zjistěte, pro která $\alpha \in R$ tvoří vektory $u = [1, 2, 3]^T$, $v = [2, 0, 1]^T$ a $w = [\alpha, 1, \alpha]^T$ pozitivní bázi $\{u, v, w\}$ prostoru R^3.

Výsledek: Pro $\alpha < 5/2$.

Příklad 5.3: Body A a B jsou v R^3 dány polohovými vektory $r_A = [1, 1, 2]$ a $r_B = [3, 4, 3]$; vektor a má počáteční bod v bodě A. Posuďte, může-li mít vektor a koncový bod v bodě B, lze-li jej vyjádřit jako lineární kombinaci trojice vektorů $u = [1, -3, 0]^T$, $v = [1, 6, 1]^T$ a $w = [3, 0, 1]^T$.

Výsledek: Může.

6 Skalární součin a ortogonalita

V úvahách o různých objektech v prostoru R^3 a jejich vlastnostech jsme mohli využít (bez zvláštního upozorňování) poznatků z klasické geometrie: víme např., co rozumíme kolmostí dvou přímek, kolmostí přímky k rovině apod., a tedy i kolmým průmětem bodu nebo přímky do roviny. V libovolném lineárním prostoru (ani v normovaném) však takové pojmy nemáme k dispozici – můžeme jen tušit, že pravděpodobně snesou zobecnění, obdobně jako vzájemné násobení vektorů z R^3 jako 2 matic: pro libovolný reálný sloupcový vektor v o 3 složkách existuje vždy součin $v^T.v$, jehož výsledkem je reálné číslo.

Definice 6.1: Lineární prostor L nazveme **lineárním prostorem se skalárním součinem**, právě když ke každé dvojici prvků $u, v \in L$ existuje takové reálné číslo $u \bullet v$ (tzv. **skalární součin** prvků u a v v prostoru L), že pro libovolné prvky $u, v, w \in L$ a jakékoliv číslo $\alpha \in R$ platí:

a) $u \bullet u \geq 0$, přičemž $u \bullet u = 0$, právě když $u = o$,

b) $(\alpha.u) \bullet v = \alpha.(u \bullet v)$,

c) $u \bullet v = v \bullet u$,

c) $(u + v) \bullet w = u \bullet v + u \bullet w$, Tato definice se formálně značně podobá definici 4.1, pouze „trojúhelníková nerovnost“ c) z definice 4.1 je zde nahrazena požadavkem komutativnosti skalárního násobení c) a požadavkem distributivnosti sčítání prvků z L vzhledem k násobení prvkem z L d) (srov. obdobné požadavky g) a h) v definici 1.1). Mezi normovanými prostory a prostory se skalárním součinem skutečně existuje úzký vztah, který budeme formulovat ve větě 6.2. Nejprve si však všimneme jiné důležité vlastnosti skalárního součinu, která bývá v matematické i aplikační literatuře prezentována jako **Schwarzova nerovnost** (a na různé úrovni obecnosti s přihlédnutím k národnosti pisatele též jako Cauchyova, Hölderova nebo Bunjakovského nerovnost). Pro její důkaz přitom vystačíme s postupem, který se nám osvědčil již v příkladu 4.1 při ověřování požadavku c) z definice 4.1.

Věta 6.1: Pro libovolnou dvojici prvků u, v jakéhokoliv lineárního prostoru se skalárním součinem platí

$$(u \bullet v)^2 \leq (u \bullet u).(v \bullet v)\,.$$

Důkaz: Studovaný lineární prostor se skalárním součinem označme L. Zvolme libovolné reálné číslo λ. Vyjděme z nerovnice

$$(u + \lambda.v) \bullet (u + \lambda.v) \geq 0\,,$$

která je evidentně splněna pro každé $u, v \in L$. Tuto nerovnici můžeme snadno převést do tvaru

$$u \bullet u + 2.\lambda.u \bullet v + \lambda^2.v \bullet v \geq 0\,,$$

který můžeme interpretovat jako kvadratickou nerovnici pro λ. Má-li však být tato nerovnice vždy splněna, musí být její diskriminant nekladný čili

$$(2.(u \bullet v))^2 - 4.(u \bullet u).(v \bullet v) \leq 0\,.$$

Odtud již vyplývá tvrzení věty.

Všimněme si, že Schwarzovu nerovnost lze pomocí goniometrické funkce „kosinus“ alternativně zapsat jako rovnost

$$u \bullet v = \sqrt{u \bullet u}.\sqrt{v \bullet v}.\cos\varphi\,,$$

kde předem neznámý reálný parametr φ může nabývat hodnot od 0 do π. O možné geometrické interpretaci tohoto parametru se zmíníme později. Nyní odvodíme slibovaný vztah mezi normou a skalárním součinem.

Věta 6.2: Každý lineární prostor L se skalárním součinem je normovaným lineárním prostorem s normou

$$||u|| = \sqrt{u \bullet u}\,.$$

pro každý prvek $u \in L$.

Důkaz: Stačí ověřit, že reálné číslo $||u||$ přiřazené uvedeným způsobem každému prvku prostoru L je skutečně normou podle definice 4.1. Z předpokladu a) definice 6.2 okamžitě vyplývá, že $||u||^2 = u \bullet u = 0$, právě když $u = o$, což je vlastně předpoklad a) z definice 4.1 (stačí odmocnit). Z předpokladu b) definice 6.2 dostáváme pro každé $\alpha \in R$ přímým výpočtem

$$||\alpha.u|| = \sqrt{(\alpha.u) \bullet (\alpha.u)} = \sqrt{\alpha^2.(u \bullet u)} = |\alpha|.\sqrt{u \bullet u} = |\alpha|.||u||\,,$$

což je zase předpoklad b) z definice 4.1. Pro libovolné $u, v \in L$ platí navíc Schwarzova nerovnost, takže

$$||u+v||^2 = (u+v) \bullet (u+v) = u \bullet u + 2.u \bullet v + v \bullet v \leq$$

$$||u||^2 + 2.||u||.||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2\,,$$

což už je vlastně hledaná „trojúhelníková nerovnost" z definice 4.1 (opět stačí odmocnit).

Na základě právě dokázané věty můžeme Schwarzovu nerovnost psát dokonce ve tvaru

$$u \bullet v = ||u||.||v||.\cos\varphi\,.$$

Konkrétní výpočet $u \bullet v$ na levé straně závisí ovšem na výběru skalárního součinu, jak uvidíme z následujícího příkladu.

Příklad 6.1: Navrhněte takový skalární součin v prostoru R^n, aby prostor R^n se skalárním součinem byl normovaným prostorem s normou z příkladu 4.1.

Řešení: Pro libovolné $u, v \in R^n$ navrhněme

$$u \bullet v = \rho_1.u_1.v_1 + \ldots \rho_n.u_n.v_n\,.$$

Poněvadž podle věty 6.2 (pokud $u \bullet v$ je skalární součin) je

$$||u|| = \sqrt{u \bullet u} = \sqrt{\rho_1.u_1^2 + \ldots + \rho_n.u_n^2}\,,$$

což je právě norma z příkladu 4.1, stačí ukázat, že navržený předpis $u \bullet v$ skutečně definuje skalární součin. V předpokladu a) je zřejmě

$$u \bullet u = \rho_1.u_1^2 + \ldots + u_n^2 \geq 0\,;$$

ekvivalence

$$u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = o$$

je zřejmá. Z jednoduché algebraické úpravy

$$(\alpha.u) \bullet v = \alpha.\rho_1.u_1 \bullet v_1 + \ldots + \alpha.\rho_1.u_1 \bullet v_1 = \alpha.(\rho_1.u_1 \bullet v_1 + \ldots + \rho_1.u_1 \bullet v_1) = \alpha.(u \bullet v)$$

vyplývá splnění předpokladu b). Předpoklad c) je rovněž splněn, neboť násobení reálných čísel je komutativní (nezáleží na pořadí). Konečně splnění předpokladu d) vyplývá z další jednoduché algebraické úpravy, v níž vystupuje i libovolné $w \in R^n$,

$$(u+v) \bullet w = \rho_1.(u_1+v_1) \bullet w_1 + \ldots + \rho_n.(u_n+v_n) \bullet w_n =$$

$$\rho_1.u_1.w_1 + \ldots + \rho_n.u_n.w_n + \rho_1.v_1.w_1 + \ldots + \rho_n.v_n.w_n = u \bullet v + u \bullet w\,.$$

Také pro speciální případ $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 1$ dostáváme skalární součin v R^n; v tomto prostoru už budeme dále pracovat výhradně s ním. V R^n lze tedy namísto Schwarzovy nerovnosti psát pouze

$$u_1.v_1 + \ldots + u_n.v_n = \|u\|.\|v\|.\cos\varphi\,,$$

kde

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots u_n^2}\,, \quad \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots v_n^2}\,.$$

Aspoň stručně zmiňme jiný příklad prostoru se skalárním součinem než R^n pro $n \in N$, a to prostor nekonečné dimenze. Mějme prostor l_2 všech posloupností reálných čísel $u = (u_1, u_2, \ldots)$ takových, že posloupnost součtů $u_1^2 + \ldots + u_n^2$ se s rostoucím n blíží k nějakému reálnému číslu (index 2 ve standardním označení prostoru informuje, že sčítáme druhé mocniny prvků posloupností). Pro libovolné $u, v \in l_2$ můžeme zavést skalární součin

$$u \bullet v = \sum_{i=1}^{\infty} u_i.v_i$$

a na základě věty 6.2 i normu

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2}\,.$$

Na další užitečné příklady prostorů se skalárním součinem nekonečné dimenze nás postupně navede studium dalších partií matematiky i aplikačních disciplín – např. při přibližném nahrazování složitých funkcí tzv. Fourierovými řadami funkcí budeme nuceni pracovat se skalárními součiny v jistém prostoru integrovatelných funkcí nekonečné dimenze. Pro jiné prostory posloupností nebo také prostory funkcí může však být značně problematické navrhnout vhodný skalární součin, i když konstrukce normy je známa. Opačná věta k větě 6.2 totiž neplatí – normovaný lineární prostor nemusí být prostorem se skalárním součinem.

Užitečnou vlastností skalárního součinu je, že (na rozdíl od normy) umožňuje zavést v lineárním prostoru pojem ortogonality (kolmosti). Práce s bázemi, jejichž všechny prvky jsou vzájemně ortogonální, a se souřadnicemi k nim vztaženými, bývá jednodušší – příkladem může být báze E_n v prostoru R^n, kde $n \in N$, která je (ve smyslu následující definice) dokonce ortonormální.

Definice 6.2: Prvky u a v lineárního prostoru se skalárním součinem L nazveme vzájemně **ortogonálními**, právě když $u \bullet v = 0$. Bázi prostoru L nazveme **ortogonální bází**, právě když všechny její prvky jsou vzájemně ortogonální. Bázi prostoru L nazveme **ortonormální bází**, právě když je ortogonální a současně norma všech jejích prvků je rovna 1.

Příklad 6.2: V R^3 najděte ortonormální bázi $B = \{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ takovou, že $u = [1, 1, 1]^T$, $v = [1, 0, 2]^T$ a $w = [2, 0, 1]^T$, $\tilde{v}$ je lineární kombinací u a v a navíc $\tilde{w}$ je lineární kombinací u, v a w.

Řešení: Z nenulové hodnoty determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.(1-4) = 3$$

obdobně jako v příkladu 2.2 vidíme, že vektory u, v a w jsou lineárně nezávislé, a mohly by tedy samy vytvořit bázi. Ze skalárního součinu

$$u \bullet v = 1 + 0 + 2 = 3 \neq 0$$

však rovněž vidíme, že taková báze by nebyla ani ortogonální (tím méně ortonormální). Poslední podmínka je nicméně zbytečná: vektor w bychom mohli nahradit libovolným vektorem lineárně nezávislým na u a v, v dalším výpočtu jej však přesto použijeme. Najdeme nejprve ortogonální bázi $G = \{u, \hat{v}, \hat{w}\}$, která už bude mít potřebné ostatní vlastnosti, a poté z ní sestavíme hledanou ortonormální bázi B postupem, který se nám osvědčil v příkladu 4.2. Prvky $\hat{v}$ budeme hledat ve speciálním tvaru

$$\hat{v} = u + \alpha.v\,, \qquad \hat{w} = u + \beta.\hat{v} + \gamma.w\,,$$

kde α, β a γ jsou předem neznámé reálné parametry (ve vyjádření $\hat{w}$ bude zde výhodnější použít $\hat{v}$ než v), přičemž

$$u \bullet \hat{v} = u \bullet \hat{w} = \hat{v} \bullet \hat{w} = 0\,.$$

První z těchto podmínek poslouží k vyčíslení α, zbylé dvě k vyčíslení β a γ. Už dříve jsme vypočetli $u \bullet v$; nyní ještě potřebujeme

$$u \bullet u = 1 + 1 + 1 = 3\,, \quad u \bullet w = 2 + 0 + 1 = 3\,.$$

Dostáváme tak

$$0 = u \bullet \hat{v} = u \bullet u + \alpha.u \bullet v = 3 + 3.\alpha\,,$$

z čehož vychází $\alpha = -1$, a tedy $\widehat{v} = [0, 1, -1]^T$. Dále potřebujeme

$$u \bullet \widehat{v} = 0 + 1 - 1 = 0\,, \quad \widehat{v} \bullet \widehat{v} = 0 + 1 + 1 = 2\,, \quad \widehat{v} \bullet w = 0 + 0 - 1 = -1\,.$$

Dostáváme tak

$$0 = u \bullet \widehat{w} = u \bullet u + \beta . u \bullet \widehat{v} + \gamma . u \bullet w = 3 + 3.\gamma\,,$$

z čehož vychází $\gamma = -1$, ale také

$$0 = \widehat{v} \bullet \widehat{w} = \widehat{v} \bullet u + \beta . \widehat{v} \bullet \widehat{v} + \gamma . \widehat{v} \bullet w = 2.\beta - \gamma = 2\beta + 1\,,$$

z čehož vychází $\beta = -1/2$, a tedy $\widehat{w} = [-1, 1/2, 1/2]^T$. Z báze G nyní určíme bázi B. Nejprve určíme

$$||\widehat{v}|| = \sqrt{\widehat{v} \bullet \widehat{v}} = \sqrt{2}$$

a navíc

$$||\widehat{w}|| = \sqrt{\widehat{w} \bullet \widehat{w}} = \sqrt{1 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{3}/\sqrt{2}\,.$$

Použijeme-li (v zájmu stručnosti zápisu) znaménka $\pm$ stejně jako v příkladu 4.2, obdržíme

$$\widetilde{v} = \pm \frac{\widehat{v}}{||\widehat{v}||} = \pm \left[0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right]^T\,,$$

$$\widetilde{w} = \pm \frac{\widehat{w}}{||\widehat{w}||} = \pm \left[-\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right]^T\,.$$

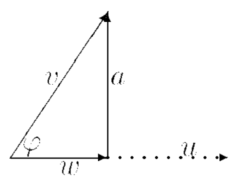
Kombinace znamének $\pm$ poskytují celkem $2^2 = 4$ různá řešení.

Ortogonalizace, resp. ortonormalizace nějaké zadané báze postupem, který jsme uplatnili v předcházejícím příkladu, patří zejména v numerické matematice k frekventovaným algoritmům. Poznamenejme však, že speciálně v R^3 se brzy naučíme hledat vektor ortogonální k zadané dvojici vektorů úspornějším způsobem na základě vektorového (nikoliv skalárního) součinu libovolných dvou vektorů $u, v \in R^3$, jehož výsledek $u \times v \in R^3$ bude vždy ortogonální jak s u, tak s v. Užitečný bude následně i dvojný vektorový součin $u \times v \times w$ a smíšený součin $u \times v \bullet w$; oba tyto součiny (obdobně jako skalární i vektorový součin) mají jednoduchou názornou geometrickou interpretaci a lze je definovat pro jakoukoliv trojici vektorů $u, v, w \in R^3$.

Vraťme se ještě ke Schwarzově nerovnosti. V lineárním prostoru se skalárním součinem L mějme dva nenulové prvky u a v a pokusme se druhý z nich vyjádřit ve tvaru $v = w + a$, kde $w \bullet a = 0$ a w je reálný násobek u. Na ilustrativním obrázku, na kterém je speciálně $L = R^3$, je průmětnou rovina určená vektory u a v; jejím konkrétní umístění je zde nepodstatné, takže indexy (informující o počátečních bodech vektorů) vynecháváme. Zřejmě platí

$$w \bullet v = w \bullet w + w \bullet a = ||w||^2$$

a také
$$u \bullet v = u \bullet w + u \bullet a = u \bullet w = u \bullet \left(\frac{||w||}{||u||} . u\right) = ||u||.||w|| \,.$$
Ze vztahu $w = v + (-a)$ vyplývá
$$||w|| \leq ||v|| + ||a|| \,,$$
můžeme tedy vyjádřit $||w||$ ve tvaru
$$||w|| = ||v||. \cos\varphi$$
pro nějaké reálné φ mezi 0 a π. Geometrický význam (přinejmenším v prostoru R^3, obdobně ale i v libovolném prostoru R^n, kde $n \in N$) je zřejmý z obrázku: φ je úhel sevřený vektory u a v; protože je však tento úhel je poplatný orientaci vektorů u a v, může skutečně nabývat hodnot od 0 až do π, zatímco úhel dvou různoběžných přímek, do nichž jsme vektory u a v umístili, nemůže přesáhnout $\pi/2$ (ve výpočtové praxi by stačilo vzít menší z úhlů φ a $\pi - \varphi$). (V analytické geometrii posléze uvidíme, že i úhel dvou mimoběžných přímek v R^3, tj. přímek, jež nemají žádný společný bod, lze vyšetřovat stejným způsobem.) Celkově vychází
$$u \bullet v = ||u||.||v||. \cos\varphi \,,$$
což je nám již dobře známý obecný tvar Schwarzovy nerovnosti. S pomocí ortogonality prvků L jsme však nově dokázali objasnit smysl (dosud jen formálně zavedeného) parametru φ.



Získané poznatky ihned využijeme v příkladech. Ještě dříve si však ukážeme, že za předpokladu $L = R^3$ lze význam parametru φ alternativně vyšetřit i jednoduchým geometricky názorným postupem, který vyžaduje pouze znalost kosinové věty. Uvažujme trojúhelník, jehož strany tvoří vektory u, v a $u - v$, přičemž φ je úhel sevřený vektory u a v. Pro jednoduchost předpokládejme, že vektory u a v jsou nenulové; je-li speciálně $u = v$, degeneruje trojúhelník v úsečku. Z kosinové věty vyplývá
$$||u - v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2.u \bullet v = ||u||^2 + ||v||^2 - 2.||u||.||v||. \cos\varphi \,,$$
současně však můžeme formálně psát
$$||u - v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2.u \bullet v = ||u||^2 + ||v||^2 - 2.||u||.||v||. \frac{u \cdot v}{||u||.||v||} \,.$$

Porovnáním obou výrazů dostáváme (aniž bychom potřebovali znát obecnou Schwarzovu nerovnost) opět

$$u \bullet v = ||u||.||v||.\cos\varphi\,.$$

Příklad 6.3: V R^4 určete takový reálný parametr α, aby dvojice vektorů $u = [1, 2, 2, 1]^T$, $v = [1, \alpha, 0, -1]^T$ svírala úhel $2.\pi/3$.

Řešení: Musí platit

$$u \bullet v = ||u||.||v||.\cos(2.\pi/3) = -||u||.||v||/2\,.$$

Po dosazení

$$u \bullet v = 1 + 2.\alpha + 0 - 1 = 2.\alpha\,,$$

$$||u|| = \sqrt{1+4+4+1} = \sqrt{10}\,, \quad ||v|| = \sqrt{1+\alpha^2+0+1} = \sqrt{\alpha^2+2}\,.$$

dostaneme

$$2.\alpha = -\sqrt{10}.\sqrt{\alpha^2+2}/2$$

a odtud po vynásobení číslem 2 a umocnění $16.\alpha^2 = 10.\alpha^2 + 20$ čili $3\alpha^2 = 10$. Tato rovnice má dvě řešení, která můžeme společně zapsat jako

$$\alpha = \pm\sqrt{10/3}\,.$$

Vzhledem k použité úpravě umocněním však musíme ověřit, zda obě nalezená řešení vyhovují zadání. Postupně dostáváme

$$||v|| = \sqrt{10/3+2} = \sqrt{16/3} = 4/\sqrt{3}\,, \quad -||u||.||v||/2 = -2.\sqrt{10/3}\,,$$

$$u \bullet v = \pm 2.\sqrt{10/3}\,.$$

Zadání tedy vyhovuje pouze druhé z řešení (se záporným znaménkem).

Příklad 6.4: V R^3 vyjádřete pomocí vektorů a, b a c vektor u kolineární s vektorem $v = a + 2.b - c$, znáte-li pouze normy $||u|| = \sqrt{32}$, $||a|| = 2$, $||b|| = 1$ a $||c|| = 4$ a víte-li, že vektory a a b jsou vzájemně ortogonální, vektory a a c svírají úhel $\pi/3$ a a vektory b a c svírají úhel $2.\pi/3$.

Řešení: Přes zdánlivou komplikovanost zadání jde o jediné: určit reálný parametr α tak, aby platilo $u = \alpha.v$. Ne zcela triviální je přitom jen výpočet normy $||v||$, pro niž dostáváme

$$||v||^2 = (a+2.b-c)\bullet(a+2.b-c) = ||a||^2+4.||b||^2+||c||^2+2.(2.a\bullet b - a\bullet c - 2.b\bullet c)\,.$$

K dispozici máme navíc podmínky

$$a \bullet b = 0\,, \quad a \bullet c = ||a||.||c||.\cos(\pi/3) = ||a||.||c||/2\,,$$

$$b \bullet c = ||b||.||c||.\cos(2.\pi/3) = -||b||.||c||/2\,.$$

Po dosazení číselných hodnot $||a||$, $||b||$ a $||c||$ vychází

$$||v||^2 = 4 + 4 + 16 + 2.(0 - 2.4/2 - 2.1.4/2) = 8\,.$$

Z poslední dosud nepoužité podmínky $||u|| = \sqrt{32}$ vychází

$$32 = ||u||^2 = \alpha^2.||v||^2 = 8.\alpha^2$$

a odtud následně $\alpha = \pm 2$, čemuž odpovídá dvojice řešení

$$u = \pm 2.v = \pm(2.a + 4.b - 2.c)\,.$$

Příklad 6.5: V R^3 najděte vektor $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ délky $||u|| = 2$, který svírá s kladnými směry prvních dvou os kartézské soustavy souřadnic úhly $\pi/3$ a $\pi/4$ a jehož třetí složka je kladná.

Řešení: Použijeme bázi E_3. Pro úhly φ_1, φ_2 a φ_3, sevřené hledaným vektorem a vektory e_1, e_2 a e_3, platí

$$u_i = u \bullet e_i = ||u||.\cos\varphi_i$$

pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$. Celkově tedy je

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = ||u||^2.(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3)$$

čili

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1\,.$$

Pro zadané úhly $\varphi_1 = \pi/3$ a $\varphi_2 = \pi/4$ můžeme tak vypočítat

$$\cos\varphi_3 = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_1} = \sqrt{1 - 1/4 - 1/2} = 1/2\,,$$

z čehož vyplývá, že buď $\varphi_3 = \pi/3$ nebo $\varphi_3 = 2.\pi/3$. Po dosazení $||u|| = 2$ potom dostáváme

$$u_1 = 2.\cos(\pi/6) = \sqrt{3}\,, \quad u_2 = 2.\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,,$$

$$u_3 = 2.\cos(\pi/3) = 1 > 0\,;$$

druhé nabízené řešení $u_3 = 2.\cos(2.\pi/3) = -1 < 0$ totiž odporuje zadání.

V posledním příkladě si všimněme ještě jedné užitečné vlastnosti vektorů z R^3 a analogicky i vektorů z R^n, kde $n \in N$: každý vektor $u \in R^n$ je možné zapsat ve tvaru

$$u = [||u||.\cos\varphi_1, \ldots, ||u||.\cos\varphi_n]^T$$

pro jisté „směrové kosiny“ úhlů $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mezi 0 a π vyhovující podmínce

$$\cos^2\varphi_1 + \ldots + \cos^2\varphi_n = 1\,.$$

Pro $n = 1$ tento vztah degeneruje v $\cos^2 \varphi_1 = 1$, takže buď $\varphi_1 = 0$ nebo $\varphi_1 = \pi$. Zajímavější je speciální případ $n = 2$: protože součtem úhlů φ_1 a φ_2 musí být pravý úhel (souřadnicové osy jsou na sebe kolmé) a $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$, je rovněž $\cos \varphi_2 = \cos(\pi/2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1$, takže jsme vlastně odvodili známý trigonometrický vzorec

$$\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1\,.$$

V prostoru R^3 lze kromě skalárního součinu dvou vektorů, jehož výsledkem je reálné číslo, definovat i další užitečné operace: vektorový součin dvou vektorů, jehož výsledkem je vektor z R^3, dvojný vektorový součin tří vektorů, jehož výsledkem je opět vektor z R^3, a smíšený součin tří vektorů (definovaný pomocí skalárního a vektorového součinu), jehož výsledkem je reálné číslo. Tyto operace lze zobecnit i pro prostory R^n, kde n je přirozené číslo větší než 3; tímto zobecněním se však zde nebudeme zabývat. Uvedené operace s vektory v R^3 zavedeme a budeme intenzívně využívat v souvislosti se studiem geometrie lineárních útvarů v R^3.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 6.6: V R^3 jsou dány nekomplanární vektory a, b a c, přičemž $||a|| = 3$, $||b|| = \sqrt{2}$ a $||c|| = 4$, vektory a a b svírají úhel $\pi/4$, vektory b a c svírají rovněž úhel $\pi/4$ a vektory a a c svírají úhel $\pi/3$. Vypočtěte délky stran a úhly rovnoběžníku sestrojeného z vektorů $a - 3.b$ a $c - a + 2.b$.

Výsledek: Rovnoběžník má strany o délkách 3 a 5, které svírají ostrý úhel φ, pro nějž platí $\cos \varphi = 4/5$ (tj. $\varphi = \arccos(4/5)$).

Příklad 6.7: Zjistěte, lze-li zvolit reálné parametry α, β a γ tak, aby uspořádaná množina $G = \{u, v, w\}$, kde $u = [2, 1, \alpha]^T$, $v = [1, 2, \beta]^T$ a $w = [2, \gamma, 0]$, byla negativní bází R^3, případně ortonormální bází R^3.

Výsledek: Množina G může být negativní bází R^3 (např. pro $\alpha = \beta = \gamma = 1$), ne však ortogonální (tím méně ortonormální) bází.

Příklad 6.8: Vypočtěte číslo $A = u \bullet v + v \bullet w + w \bullet u$, víte-li, že součet vektorů $u, v, w \in R^3$ je nulový vektor a platí $||u|| = ||v|| = ||w|| = 1$.

Výsledek: Hledané číslo je $A = -3/2$.

7 Lineární operátory, vlastní čísla a vektory reálných čtvercových matic

Kromě samotných lineárních prostorů a operací v nich je velmi užitečné zkoumat také vlastnosti lineárních (i jiných) operátorů, které tyto prostory zobrazují mezi sebou navzájem. Vzhledem ke značné složitosti obecné problematiky tohoto druhu (zejména pro prostory, které nemají konečnou dimenzi) se po úvodních úvahách soustředíme převážně na ty lineární operátory, jež zobrazující prostor R^n, kde $n \in N$, do sebe samotného.

Definice 7.1: Operátor F zobrazující lineární prostor L do lineárního prostoru $\widetilde{L}$ (tj. předpis přiřazující každému prvku z L nějaký prvek z $\widetilde{L}$) nazveme **lineárním operátorem**, právě když pro každé dva prvky $u, v \in L$ a pro libovolné reálné číslo α v prostoru $\widetilde{L}$ platí $F(u+v) = F(u) + F(v)$ a současně $F(\alpha.u) = \alpha.F(u)$.

Vyhovuje-li operátor F této definici, platí pro něj zřejmě pro libovolné $u, v \in L$ a $\alpha, \beta \in R$

$$F(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.F(u) + \beta.F(v)\,;$$

tento vztah lze snadno přepsat též pro jakýkoliv konečný počet prvků L a stejný počet reálných součinitelů. Speciálně předpokládejme $L = R^n$ a $\widetilde{L} = R^m$ a uvažujme nějakou bázi $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ prostoru R^n a nějakou bázi $\widetilde{G} = \{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m\}$ prostoru R^m. Každý z vektorů $F(g_1), \dots, F(g_n)$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze $\widetilde{G}$, tj. ve tvaru

$$\begin{bmatrix} F(g_1) \\ \dots \\ F(g_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \dots \\ \tilde{g}_m \end{bmatrix}$$

pro nějakou matici reálných koeficientů a_{ij} s indexy nabývajíc'ımi hodnot $i \in \{1, \dots, m\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$. Zvolíme-li nějaké $u \in L$ a vypočteme $v = F(u) \in \widetilde{L}$, můžeme tedy psát

$$u = u_1.g_1 + \dots + u_n.g_n\,, \quad v = v_1.\tilde{g}_1 + \dots + v_m.\tilde{g}_m\,,$$

kde $(u_1, \dots, u_n)$ jsou souřadnice vektoru u v bázi G a $(v_1, \dots, v_m)$ souřadnice vektoru v v bázi $\widetilde{G}$. Máme však také

$$v = F(u_1.g_1 + \dots u_n.g_n) = u_1.F(g_1) + \dots + u_n.F(g_n) =$$
$$= \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \dots \\ \tilde{g}_m \end{bmatrix} .$$

Odtud vyplývá

$$\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

neboli (po transpozici celé maticové rovnice) též

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} .$$

Každému lineárnímu operátoru F pak při zvolených bázích G a $\tilde{G}$ odpovídá právě 1 taková matice $A \in R^{m\times n}$, že platí $u = A.v$; v tomto smyslu se často hovoří o reprezentaci lineárních operátorů maticemi. Speciálně pro $m = n$, kdy operátor F zobrazuje prostor L opět do sebe, je matice A čtvercová. Vzhledem k praktickému významu tohoto případu se dále budeme hlouběji zabývat právě čtvercovými maticemi.

Důležitou informací o každém lineárním operátoru L, který zobrazuje nějaký lineární prostor do jiného (nebo i stejného) lineárního prostoru $\tilde{L}$, je počet a charakter řešení tzv. charakteristické rovnice $F(v) = \lambda.v$ v $\tilde{L}$ pro $v \in L$ a $\lambda \in R$. Nyní se sice budeme podrobněji věnovat pouze případu $L = \tilde{L} = R^n$, kde $n \in N$; na charakteristické rovnice však postupně narazíme i v jiných případech, např. při hledání řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (tj. rovnic, v nichž vystupují reálné funkce jedné reálné proměnné spolu se svými derivacemi), kde F bude mít význam jistého diferenciálního operátoru.

Definice 7.2: Budiž F lineární operátor zobrazující lineární prostor L do lineárního prostoru $\tilde{L}$. Každý nenulový prvek $v \in L$ nazveme **vlastním prvkem** operátoru F, právě když $F(v) = \lambda.v$ pro nějaké reálné číslo λ (tzv. **vlastní číslo** operátoru F) v prostoru $\tilde{L}$.

Přes svou obecnost nám tato definice ještě nebude plně vyhovovat. Zatím jsme totiž pracovali důsledně s reálnými (nikoliv komplexními) čísly. Musíme ovšem poznamenat, že všechny předchozí definice a věty by bylo možno (za cenu značných formálních komplikací) modifikovat tak, aby v nich namísto reálných čísel vystupovala čísla komplexní: např. už v definici 1.1 jsme mohli připustit $\alpha, \beta \in C$ a pracovat s násobením komplexní konstantou. V celém výkladu to (z důvodu četných praktických aplikací) však budeme potřebovat právě na tomto místě; připusťme proto jen zde pro speciální případ $L = \tilde{L} = R^n$, kde $n \in N$, že $\lambda \in C$ a $v \in C^n$. Všimněme si přitom, že samotná matice A, která reprezentuje lineární operátor F, zůstane reálná. Můžeme potom hovořit o vlastních číslech a vlastních vektorech, které ovšem nemusejí být reálné, reálných čtvercových matic.

V uvedeném speciálním případě má charakteristická rovnice tvar

$$A.v = \lambda.v$$

pro známou matici $A \in R^{n\times n}$, neznámé vlastní číslo $\lambda \in C$ a neznámý (nenulový) vlastní vektor $v \in C^n$. Lze přitom očekávat, že zmiňované neznámé nebudou rovnicí určeny jednoznačně. Charakteristickou rovnici lze totiž přepsat do tvaru

$$(A - \lambda.I).v = o\,,$$

kde o je nulový sloupcový vektor o n prvcích a I je jednotková matice řádu n. Tato soustava má vždy triviální řešení $v = o$, které však vylučujeme (každý vlastní prvek musí být podle definice nenulový), a jiné řešení má právě v případě, že matice $A - \lambda.I$ je singulární, tj. v případě, že determinant této matice je roven nule. Pro $n = 1$ tato podmínka přejde v jednoduchý vztah $a_{11} - \lambda = 0$: existuje tedy jediné reálné vlastní číslo $\lambda = a_{11}$ a jemu odpovídající vlastní vektor v degeneruje v libovolné komplexní číslo. Tímto zvláštním případem se už dále nebudeme zabývat. Rozepíšeme-li pro $n > 1$ stejnou podmínku po složkách matice $A - \lambda.I$, dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Tento determinant můžeme vždy postupně vypočítat. Připomeňme si, že jednoduchý obecný vzorec známe pro $n = 2$, poněkud složitější pro $n = 3$ (tzv. Sarrusovo pravidlo); pro $n > 3$ by už jeho složitost obecného vzorce značně narůstala, můžeme však pracovat s rozvojem podle vhodných řádků nebo sloupců, jímž výpočet determinantu matice řádu n nahrazujeme rekurentně výpočtem nejvýše n determinantů řádu $n - 1$ (s využíváním vlastností konkrétních matic, např. výskytu nul na některých pozicích, a operací, které nemění hodnotu determinantu). Vždy však nakonec dostaneme rovnici typu

$$(-1)^n.\lambda^n + b_{n-1}.\lambda^{n-1} + \ldots + b_1.\lambda + b_0 = 0$$

pro nějaké součinitele $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in R$, tj. vlastně rovnici $f(\lambda) = 0$ pro jistou polynomickou funkci $f \in P^n$. Polynomickými funkcemi se budeme ještě zabývat podrobněji v rámci dalšího studia; zde proto jen (bez důkazu) uveďme, že každou rovnici uvedeného typu je teoreticky možné (i když ne vždy numericky snadné) přepsat do tvaru

$$(-1)^n.(\lambda - \lambda_1).\ldots.(\lambda - \lambda_n) = 0\,;$$

(koeficient $(-1)^n$, který přepisujeme formálně z předchozí rovnice, lze odstranit). V této rovnici jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jistá komplexní čísla, která jsou vždy buď reálná nebo po dvojicích komplexně sdružená (tj. pokud pro nějaký index $j \in \{1, \ldots, n\}$ je $\lambda_j = \alpha + i.\beta$, kde $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ a symbol i vyhrazujeme pro imaginární jednotku, musí pro nějaký index $k \in \{1, \ldots, n\}$ být $\lambda_k = \alpha - i.\beta$). Evidentně $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda = \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Jejich počet je nejvýše n, nejméně však 1: např. pro $A = I$ je charakteristická rovnice $(-1)^n.(\lambda - 1)^n = 0$ neboli $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$.

K jednotlivým vlastním číslům můžeme hledat vlastní vektory; nějaký vlastní vektor vždy podle Frobeniovy věty existuje, neboť matice soustavy a matice rozšířená mají stejnou hodnost menší než n (hodnost menší než n potřebujeme, protože pro hodnost n by existovalo jedině triviální řešení o, které nás nezajímá). Vlastní vektory jsou přitom vždy určeny až na násobnou konstantu: je-li v vlastním vektorem matice A, je nutně i $\alpha.v$ pro každé $\alpha \in R$ (a dokonce pro každé

$\alpha \in C$, čímž se však dále nebudeme zabývat) také vlastním vektorem matice A. Na místě jsou ovšem otázka po reálnosti, po lineární závislosti, případně i po ortogonálnosti takto odvozených vlastních vektorů: např. pro $A = I$, kde máme k dispozici jediné vlastní číslo 1 násobnosti n, můžeme za vlastní vektor matice A prohlásit libovolný vektor z R^n, takže jakákoliv báze prostoru R^n tvoří soustavu n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A. Úplnější odpověď poskytují následující věty.

Věta 7.1: Nechť A je matice z $R^{n\times n}$, kde $n \in N$. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ($s \in \{1, \ldots, n\}$) různá vlastní čísla matice A a $v_1, \ldots, v_s$ jim odpovídající vlastní vektory, tj. vektory splňující rovnice

$$A.v_1 = \lambda_1.v_1\,, \quad \ldots\,, \quad A.v_s = \lambda_s.v_s\,,$$

jsou vektory $v_1, \ldots, v_s$ lineárně nezávislé.

Důkaz: Předpokládejme naopak, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ (které musejí být nenulové), mohou být lineárně závislé v R^n. Potom existují taková reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$, že platí

$$v_s = \alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_{s-1}.v_{s-1}\,.$$

Z charakteristické rovnice

$$A.v_s = \lambda_s.v_s$$

dostaneme

$$\alpha_1.A.v_1 + \ldots + \alpha_{s-1}.A.v_{s-1} = \lambda_s.(\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_{s-1}.v_{s-1})$$

a s použitím obdobných rovnic formulovaných pro λ_j a v_j, kde $j \in \{1, \ldots, s-1\}$, namísto λ_s a v_s, dále

$$\alpha_1.(\lambda_1 - \lambda_s).v_1 + \ldots + \alpha_{s-1}.(\lambda_{s-1} - \lambda_s).v_{s-1} = o\,.$$

Pro λ_s různé od $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$ tak dospíváme ke sporu $\alpha_1 = \ldots \alpha_{s-1} = 0$.

Věta 7.2: Nechť A je symetrická matice z $R^{n\times n}$, kde $n \in N$. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ($s \in \{1, \ldots, n\}$) různá vlastní čísla matice A a $v_1, \ldots, v_s$ jim odpovídající vlastní vektory, jsou každé dva z vektorů $v_1, \ldots, v_s$ vzájemně ortogonální.

Důkaz: Uvažujme charakteristickou rovnici formulovanou jednak pro λ_j a v_j, jednak pro λ_k a v_k s různými indexy $j, k \in \{1, \ldots, s\}$, tj.

$$A.v_j = \lambda_j.v_j\,, \quad A.v_k = \lambda_k.v_k\,.$$

Vynásobíme-li obě strany první rovnice skalárně vektorem v_k a obě strany druhé rovnice vektorem v_j, dostaneme na levé straně obou rovnic vzhledem k symetrii matice A stejný výsledek $(A.v_j) \bullet v_k = (A.v_k) \bullet v_j$; porovnáním pravých stran pak vychází

$$\lambda_j.v_j \bullet v_k = \lambda_k.v_j \bullet v_k$$

neboli

$$(\lambda_j - \lambda_k).v_j \bullet v_k = 0 .$$

Pro $\lambda_j \neq \lambda_k$ už přímo dostáváme požadovaný výsledek.

Věta 7.3: Nechť A je symetrická matice z $R^{n\times n}$, kde $n \in N$. Pak všechna vlastní čísla matice A jsou reálná a jim odpovídající vlastní vektory lze nalézt v R^n.

Důkaz: Uvažujme libovolné vlastní číslo matice A ve tvaru $\kappa + i.\rho$, kde $\kappa, \rho \in R$, a jemu odpovídající vlastní vektor ve tvaru $a + i.b$, kde $a, b \in R^n$. Zřejmě platí

$$A.(a + i.b) = (\kappa + i.\rho).(a + i.b) .$$

Rozkladem na reálnou a imaginární složku obdržíme

$$A.a = \kappa.a - \rho.b , \quad A.b = \rho.a + \kappa.b .$$

Vynásobíme-li obě strany první rovnice skalárně vektorem b a obě strany druhé rovnice vektorem a, dostaneme na levé straně obou rovnic vzhledem k symetrii matice A stejný výsledek $(A.a) \bullet b = (A.b) \bullet a$; porovnáním pravých stran pak vychází

$$\kappa.a \bullet b - \rho.b \bullet b = \rho.a \bullet a + \kappa.a \bullet b$$

neboli

$$\rho. \left(||a||^2 + ||b||^2\right) = 0 .$$

Poněvadž $a = b = o$ není přípustné, dospíváme k závěru $\rho = 0$. Můžeme už tedy psát pouze

$$A.a = \kappa.a , \quad A.b = \kappa.b ;$$

volba $b = o$ pak zajistí reálnost vlastního vektoru.

Věta 7.4: Nechť A je symetrická matice z $R^{n\times n}$, kde $n \in N$. Platí-li pro všechny nenulové vektory $u \in R^n$

$$(A.u) \bullet u \geq 0 ,$$

jsou všechna vlastní čísla matice A reálná nezáporná. Platí-li pro všechny nenulové vektory $u \in R^n$ dokonce

$$(A.u) \bullet u > 0 ,$$

jsou všechna vlastní čísla matice A kladná.

Důkaz: Reálnost vlastních čísel vyplývá z předchozí věty. Připusťme nejprve, že některé vlastní číslo λ, jemuž odpovídá vlastní vektor $v \in R^n$, je záporné. Musí tedy platit

$$0 \leq (A.v) \cdot v = \lambda.v \cdot v = \lambda ||v||^2 < 0 ,$$

což není možné. Připusťme ještě, že některé vlastní číslo λ, jemuž odpovídá vlastní vektor $v \in R^n$, není kladné a zároveň je splněn přísnější z předpokladů věty (s ostrou nerovností). Potom musí analogicky platit

$$0 < (A.v) \cdot v = \lambda.v \cdot v = \lambda \|v\|^2 \leq 0\,,$$

což též není možné.

Pro matici A, která vyhovuje prvnímu (slabšímu) předpokladu věty 7.4, se v literatuře často používá název „pozitivní matice“; pro matici A, která vyhovuje druhému (silnějšímu) předpokladu věty 7.4, se obdobně používá název „pozitivně definitní matice“. Takové matice i mají další výhodné vlastnosti: např. je-li A maticí soustavy n lineárních algebraických rovnic o n reálných neznámých, lze odvodit (a softwarově implementovat) efektivní algoritmy pro řešení takové soustavy i pro velké číslo n. Snadaná je i analýza řešitelnosti soustavy, k níž jinak využíváme Frobeniovy věty – ze druhého předpokladu totiž mj. vyplývá, že hodnost matice A je rovna n, takže soustava má vždy jediné řešení.

Uvedené věty neřeší zdaleka všechny otázky související s vlastními čísly a vektory čtvercových matic. To bude zřejmé i z následující úvahy. Označme např. s počet čísel λ_j (pro $j \in \{1, \ldots, n\}$), která jsou rovna vlastnímu číslu λ_1. Jsou-li všechna vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matice $A \in R^{n \times n}$ různá, je vždy $s = 1$. Jelikož ke každému vlastnímu číslu lze najít nějaký vlastní vektor, dostáváme podle věty 7.1 (srov. též komentář před tímto příkladem) celkem n lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, \ldots, v_n$, z nichž lze vytvořit bázi prostoru R^n. Každý další vektor v R^n by už tedy byl lineární kombinací $v_1, \ldots, v_n$; jinak řečeno: ke každému vlastnímu číslu lze vlastní vektor (až na násobnou konstantu) určit jednoznačně. Pro $s > 1$ zřejmě vlastnímu číslu λ_1 odpovídá obecně více lineárně nezávislých vlastních vektorů, které, jsouce doplněny o prvek o, vytvářejí podprostor prostoru R^n; v tomto podprostoru lze pak sestavit ortogonální bázi. Mohli bychom očekávat, že dimenze takového podprostoru bude vždy rovna s. Tato hypotéza je bohužel, jak můžeme vidět mj. v příkladu 7.3 (pro $\alpha = \lambda = 1$), chybná. Potřebnou teorii, umožňující mj. stanovení uvedené dimenze, zde však vynecháme, neboť její prezentace by prodloužila výklad věnovaný lineárním operátorům zobrazujícím R^n do R^n několikanásobně. V našich konkrétních příkladech (vcelku jednoduchých, nevyžadujících použití výpočetní techniky) nám to naštěstí nebude vadit, neboť všechny vlastní vektory korektně získáme Gaussovou eliminací.

Příklad 7.1: Najděte v R^3 všechny vlastní vektory matic

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

A^{-1} a $A - 2.I$, je-li I jednotková matice v $R^{3 \times 3}$. Zjistěte, tvoří-li tyto vlastní vektory bázi R^3.

Řešení: Nejprve určíme vlastní čísla matice A, a to z podmínky, že determinant matice $A - \lambda.I$ musí být roven nule, Každé vlastní číslo λ matice A musí vyhovět podmínce nulovosti determinantu matice $A - \lambda.I$, tj.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sarrusovým pravidlem odtud dostáváme

$$-\lambda^3 + 2.\lambda^2 - 2.\lambda^2 - 2.\lambda^2 - 4.\lambda + 4.\lambda + 4.\lambda + 8 - 3 - 9 + 6 + 6 - 3.\lambda + 3.\lambda - 3.\lambda = 0$$

a po zjednodušení

$$-\lambda^3 - 2.\lambda^2 + \lambda + 2 = 0\,.$$

Každé celočíselné řešení takové rovnice musí být (až na znaménko) dělitelem posledního aditivního členu na levé straně, tedy čísla -2. (Podrobněji se této problematice v rámci teorie reálné funkce reálné proměnné věnují skripta [10].) Dosazením se můžeme přesvědčit, že rovnici lze dokonce zapsat ve tvaru

$$-(\lambda - 1).(\lambda + 1).(\lambda + 2) = 0\,,$$

který odpovídá jejím třem celočíselným řešením 1, -1 a -2 (ani jejich reálnost přitom nebyla žádnou z předešlých vět zaručena). Z existence tří různých vlastních čísel už (bez dalšího ověřování) na základě věty 7.1 vyplývá, že z odpovídajících (dosud neurčených) vlastních vektorů lze vždy vytvořit bázi R^3. Vlastní vektory v matice A musejí být netriviálními řešeními soustavy

$$(A - \lambda.I).v = o\,,$$

získatelnými Gaussovou eliminací. Pro $\lambda = 1$ vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [2.\xi, \xi, \xi]^T\,.$$

Pro $\lambda = -1$ vychází

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [\xi, 0, \xi]^T\,.$$

Pro $\lambda = -2$ vychází

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [\xi, -\xi, \xi]^T .$$

Determinant matice A je nenulový (což nemusíme ověřovat výpočtem) – v opačném případě by totiž soustava $A.v = o$ měla nějaké netriviální řešení, takže číslo 0 by bylo vlastním číslem A. Vlastní vektory matice A^{-1} musejí být shodné s vlastními vektory matice A, neboť vynásobením charakteristické rovnice $A.v = \lambda.v$ zleva maticí $\lambda^{-1}.A^{-1}$ vychází

$$\lambda^{-1}.v = A^{-1}.v .$$

Matice A^{-1} má tedy vlastní čísla 1, -1 a $-1/2$. Také vlastní vektory matice $A - 2.I$ musejí být shodné s vlastními vektory matice A, neboť charakteristickou rovnici můžeme v tomto případě psát ve tvaru $A.v = \mu.v$, kde $\mu = \lambda + 2$. Matice $A - 2.I$ má tedy vlastní čísla 3, 1 a 0.

Příklad 7.2: Najděte v R^3 všechny vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

které mají nezápornou první souřadnici a jednotkovou délku. Zjistěte, tvoří-li tyto vektory ortogonální bázi v R^n.

Řešení: Nejprve určíme vlastní čísla matice A, a to stejně jako v minulém příkladu z podmínky, že determinant matice $A - \lambda.I$ musí být roven nule. Díky tomu, že matice A je symetrická, víme ale nyní z věty 7.3 předem, že všechna její vlastní čísla budou reálná. Každé vlastní číslo λ matice A musí vyhovět podmínce nulovosti determinantu matice $A - \lambda.I$, tj.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Sarrusovým pravidlem odtud dostáváme

$$-\lambda^3 + 7.\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 - 7.\lambda - 7.\lambda - \lambda + 7 + 32 - 4 + 4.\lambda - 112 + 16.\lambda - 4 + 4.\lambda = 0$$

a po zjednodušení

$$-\lambda^3 + 9.\lambda^2 + 9.\lambda - 81 = 0 .$$

Zde můžeme zopakovat úvahu z předchozího případu o možných celočíselných řešeních, která (až na znaménko) musejí být zde děliteli čísla 81. Dosazením se můžeme přesvědčit, že rovnici lze zapsat ve tvaru

$$-(\lambda - 9).(\lambda - 3).(\lambda + 3) = 0\,,$$

který odpovídá jejím třem celočíselným řešením 9, 3 a -3. Poněvadž matice A je symetrická a má tři různá vlastní čísla, musejí vlastní vektory (bez ohledu na násobné konstanty) příslušné k těmto vlastním číslům v důsledku věty 7.3 tvořit ortogonální bázi R^3. Vlastní vektory v matice A musejí být netriviálními řešeními soustavy

$$(A - \lambda.I).v = o\,,$$

získatelnými Gaussovou eliminací. Pro $\lambda = 9$ vychází

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [-2.\xi, \xi, \xi]^T\,.$$

Z podmínky

$$1 = \|v\|^2 = 4.\xi^2 + \xi^2 + \xi^2 = 6.\xi^2$$

vychází $\xi = \pm 1/\sqrt{6}$; ze dvojice řešení vyhoví

$$v = [2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}]^T\,.$$

Pro $\lambda = 3$ vychází

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [\xi, \xi, \xi]^T\,.$$

Z podmínky

$$1 = \|v\|^2 = \xi^2 + \xi^2 + \xi^2 = 3.\xi^2$$

vychází $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$; ze dvojice řešení vyhoví

$$v = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T\,.$$

Pro $\lambda = -3$ vychází

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [0, -\xi, \xi]^T .$$

Z podmínky

$$1 = \|v\|^2 = 0 + \xi^2 + \xi^2 = 2.\xi^2$$

pak vychází $\xi = \pm 1/\sqrt{2}$; vyhoví obě řešení

$$v = \pm[0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T .$$

Příklad 7.3: Najděte v R^4 všechny vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

která mají všechny složky reálné s výjimkou druhé složky, která smí být ryze imaginární, pro $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

Řešení: Pro libovolné reálné α nejprve opět určíme vlastní čísla matice A z podmínky, že determinant matice $A - \lambda.I$ musí být roven nule. Každé vlastní číslo λ matice A musí vyhovět podmínce nulovosti determinantu matice $A - \lambda.I$, kterou zde ihned zjednodušíme s výsledkem

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 . \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.(\lambda^2 - 2.\lambda + 1 - \alpha) .$$

Získaná algebraická rovnice kromě dvojnásobného řešení $\lambda = 0$ také dvojici komplexně sdružených řešení

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4 - 4.(1-\alpha)}\right) = 1 \pm \sqrt{\alpha} .$$

Vlastní vektory sestavíme na základě Gaussovy eliminace stejným postupem jako v obou předchozích příkladech. Pro $\alpha = 0$ máme 2 dvojnásobná řešení $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$. Pro $\lambda = 0$ vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolné reálné parametry ξ a η, z nichž aspoň jeden je nenulový, dostáváme již

$$v = [0, 0, \xi, \eta]^T .$$

Pro $\lambda = 1$ vychází

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [0, \xi, 0, 0]^T .$$

Pro $\alpha = 1$ máme 1 trojnásobné řešení $\lambda = 0$ a 1 jednoduché řešení $\lambda = 1$. Pro $\lambda = 0$ vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolné reálné parametry ξ, η a ζ, z nichž aspoň jeden je nenulový, dostáváme již

$$v = [\xi, -\xi, \eta, \zeta]^T .$$

Pro $\lambda = 2$ vychází

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [\xi, \xi, 0, 0]^T .$$

Pro $\alpha = -1$ máme 1 dvojnásobné řešení $\lambda = 0$ a 1 dvojici komplexně sdružených řešení $\lambda = 1 \pm i$. Pro $\lambda = 0$ vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolné reálné parametry ξ a η, z nichž aspoň jeden je nenulový, dostáváme již

$$v = [0, 0, \eta, \zeta]^T .$$

Pro $\lambda = 1 \pm i$ (provádíme-li eliminační úpravy z úsporných důvodů pro obě vlastní čísla současně) vychází

$$\begin{bmatrix} \mp i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \mp i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \mp i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mp i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

takže, zvolíme-li libovolný nenulový reálný parametr ξ, dostáváme již

$$v = [\xi, \mp \xi.i, 0, 0]^T .$$

Příklad 7.4: Ověřte, že matice $A \in R^{1000 \times 1000}$, kterou lze zapsat ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

má všechna vlastní čísla kladná.

Řešení: Matice je příliš rozsáhlá na to, aby bylo rozumné ověřování přímým výpočtem. Je však symetrická, takže podle věty 7.3 musejí být všechna její vlastní čísla reálná. Zda jsou skutečně kladná, můžeme zjistit podle věty 7.4. Pro libovolný nenulový vektor $u \in R^{1000}$ dostáváme

$$(A.u) \bullet u = v^T.A.u =$$

$$2.u_1^2 + 2.u_1.u_2 + 4.u_2^2 + 2.u_2.u_3 + 4.u_3^2 + \dots +$$

$$4.u_{998}^2 + 2.u_{998}.u_{999} + 4.u_{999}^2 + 2.u_{998}.u_{999} + 2.u_{1000}^2 =$$

$$u_1^2 + 2.u_2^2 + \dots + 2.u_{999}^2 + u_{1000}^2 + (u_1 + u_2)^2 + \dots + (u_{999} + u_{1000})^2 \geq$$

$$u_1^2 + \dots + u_{1000}^2 > 0 ,$$

což garantuje kladnost všech vlastních čísel.

Matice obdobné matici z předešlého příkladu (pásového charakteru, v praxi většinou s méně pravidelným obsahem) skutečně vznikají při numerickém řešení diferenciálních rovnic, používá-li se jejich diskretizace (přibližná náhrada soustavami lineárních algebraických rovnic) na základě metody sítí (čili konečných diferencí) nebo metody konečných prvků. Z hlediska aplikací je vyšetřování vlastních čísel a vektorů důležité např. při zjišťování tzv. vlastních tvarů kmitání stavebních konstrukcí: zejména při navrhování a posuzování příčně zatížených štíhlých konstrukcí (větrem namáhaných stožárů, komínů apod.) může být tento výpočet rozhodující. Výpočet se pochopitelně v dnešní době neprovádí ručně, ale specifickými algoritmy numerické matematiky (jimiž se zde zatím nezabýváme) s využitím vhodné výpočetní techniky.

Všimněme si ještě jedné důležité vlastnosti charakteristických čísel a vektorů. Podaří-li se nám najít nějaký počet $m \in \{1, \ldots n\}$ vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ matice $A \in R^{n\times n}$ a jim odpovídajících vlastních vektorů

$$v_1 = [v_{11}, \ldots, v_{1n}]^T, \quad \ldots, \quad v_s = [v_{m1}, \ldots, v_{mn}]^T$$

(v_{jk} pro $j \in \{1, \ldots, s\}$ a $k \in \{1, \ldots, n\}$ jsou v obecném případě čísla z C) můžeme sestavit čtvercovou diagonální matici

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ldots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

(nuly mimo hlavní diagonálu v tomto zápisu vynecháváme) a obdélníkovou matici

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & \ldots & v_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{1n} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix},$$

pro něž platí

$$A.V = V.\Lambda .$$

Vynásobíme-li tuto rovnici zleva maticí V^T, dostáváme novou rovnici

$$V^T.A.V = V^T.V.\Lambda ,$$

která může být užitečná pro výpočet vlastních čísel matice A, známe-li pouze její vlastní vektory (což bývá užitečné v numerických metodách pro přibližné zjišťování vlastních čísel rozsáhlých matic). Je-li matice $V^T.V$ regulární, získáváme násobením této nové rovnice maticí inverzní k matici $V^T.V$ zleva

$$\Lambda = \left(V^T.V\right)^{-1}.V^T.A.V .$$

Zejména jsou-li vlastní vektory $v_1, \ldots, v_n$ vzájemně ortogonální, je matice $V^T.V$ nutně diagonální (a její inverze je tedy velmi jednoduchá); je-li navíc dokonce $||v_1|| = \ldots = ||v_n|| = 1$, je dokonce $V^T.V$ jednotková matice z $R^{m\times m}$, a vychází tedy přímo

$$\Lambda = V^T.A.V .$$

Poznamenejme ještě, že v nejjednodušším případě $m = 1$ dostáváme (připustíme-li obecně $\|v_1\| \neq 1$) klasický „Rayleighův podíl“ pro výpočet jednoho vlastního čísla

$$\lambda_1 = \frac{(A.v_1) \cdot v_1}{\|v_1\|^2}\,.$$

Na dvou příkladech si nyní ukážeme, jak lze znalosti vlastních čísel a vektorů matice soustavy efektivně využít při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic,

Příklad 7.5: Pro matici A z příkladu 7.2 určete s využitím výsledků příkladu 7.2 neznámý vektor $x \in R^3$ ze soustavy $A.x = b$, kde $b = [5, -4, 5]^T$.

Řešení: Označme

$$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

matici z sestavenou ze všech vlastních vektorů matice A, nalezených v příkladu 7.2 (pro třetí vlastní vektor volíme záporné znaménko). Předností matice V je, že z jejích sloupců lze vytvořit ortonormální bázi R^3, a matice V je tedy nejen regulární, ale dokonce platí $V^T.V = I$, kde I je jednotková matice z $R^{3\times 3}$. Označme dále

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

příslušnou diagonální matici vlastních čísel. Zavedeme-li pomocnou proměnnou $y \in R^3$ vztahem $x = V.y$, dostaneme zadanou soustavu rovnic v novém tvaru

$$A.V.y = b\,.$$

Poněvadž $V^T.A.V = \Lambda$, vynásobením obou stran maticí V^T zleva vychází

$$\Lambda.y = V^T.b\,.$$

Odtud už snadno (bez jakékoliv eliminace) můžeme vypočítat

$$y = \Lambda^{-1}.V^T.b$$

a pouhým násobením známých matic konečně

$$x = V.\Lambda^{-1}.V^T.b\,;$$

zde zřejmě

$$A^{-1} = V.\Lambda^{-1}.V^T =$$

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/9 & & \\ & 1/3 & \\ & & -1/3 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/27. \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 2 & 8 & -1 \end{bmatrix},$$

a tedy $x = A^{-1}.b = [1, 2, -1]^T$.

Příklad 7.6: Zjistěte, pro který reálný parametr α má maticová rovnice $A.x = 2.x$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ \alpha & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

nějaké netriviální řešení $x \in R^3$. Pro takový parametr α pak najděte všechna taková řešení x a porovnejte je s řešením $y \in R^3$ maticové rovnice $A^T.A.y = 2.A^T.y$, resp. s řešením $z \in R^3$ maticové rovnice $A.z = 2.A^T.z$.

Řešení: První zadanou maticovou rovnici lze zapsat ve tvaru

$$(A - 2.I).x = 0\,,$$

kde I je jednotková matice z $R^{3\times 3}$. Netriviální řešení zřejmě existuje, právě když matice $A - 2.I$ má vlastní číslo 2; pak x je odpovídající vlastní vektor. Gaussovou eliminací ihned vychází

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

musí tedy platit $\alpha = 1$. Pro libovolné $\xi \in R$ je řešením maticové rovnice $A.x = 2.x$ vektor $x = [\xi, 0, -\xi/3]^T$ (speciálně pro $\xi = 0$ dostáváme ovšem vylučované triviální řešení). K matici A^T můžeme najít matici inverzní: Jordanovou úpravou Gaussovy eliminace vychází

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & -3 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -6 & -6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 24 & 0 & -3 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 & 36 & -24 & 12 \\ 0 & 40 & 0 & 4 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,3 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 0,6 & -0,3 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix},$$

takže

$$(A^T)^{-1}.A = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & -0,3 \\ -0,6 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 & 0,5 \\ 0,9 & 1,6 & 1,5 \\ -2,4 & -1,6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matice A je zřejmě regulární, takže $y = x$: vynásobíme-li druhou ze zadaných maticových rovnic násobit zleva maticí A^{-1}, dostaneme první z nich. Vynásobíme-li poslední zadanou maticovou rovnici rovněž zleva maticí A^{-1}, můžeme výsledek přepsat do tvaru

$$((A^T)^{-1}.A - 2.I).z = 0\,.$$

Netriviální řešení zřejmě existuje, právě když matice $(A^T)^{-1}.A - 2.I$ má vlastní číslo 2; pak z je odpovídající vlastní vektor. Gaussovou eliminací nyní vychází

$$\begin{bmatrix} -1,3 & -0,2 & 0,5 \\ 0,9 & -0,4 & 1,5 \\ -2,4 & -1,6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 13 & 2 & -5 \\ 9 & -4 & 15 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 13 & 2 & -5 \\ 48 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & -5 \\ 24 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 13 & 2 & -5 \\ 24 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z trojúhelníkového tvaru výsledné matice soustavy (už bez dalšího výpočtu) vidíme, že žádné netriviální řešení z neexistuje.

Když jsme se zabývali standardními způsoby konstrukce normy libovolné matice $A \in R^{m \times n}$, kde $m, n \in N$, poznamenali jsme, že alternativní způsob konstrukce normy vychází ze znalostí o vlastních číslech čtvercových matic. Pro poslední z norem uvedených v části 4 ponechme nyní (namísto původního označení $||A||$) označení $||A||_*$. Normou $||A||$ budeme nadále rozumět druhou odmocninu z největšího vlastního čísla matice $A^T.A$. Tato matice je vždy čtvercová symetrická řádu m a ze vztahu

$$v^T.A^T.A.v = (A.v) \bullet (A.v) \geq 0$$

platného pro libovolný nenulový vektor $v \in R^m$ je okamžitě zřejmé, že všechna její vlastní čísla jsou reálná nezáporná. Lze ukázat, že $||A||$ skutečně vyhovuje definici 4.1; obdobně jako v příkladu 4.1 je přitom pracné jen ověřování vlastnosti c). Pro normu $||A||$ se často používá pojem „spektrální norma“ (pojmem „spektrum matice“ bývá totiž v literatuře stručně označována množina všech vlastních čísel zadané matice). Pokud bychom však speciálně (pro $m = 1$) chtěli takto sestavit normu vektoru $u = [u_1, \ldots, u_n] \in R^n$, nedostali bychom nic nového, poněvadž $u^T.u = u \bullet u = ||u||^2$ je formálně matice prvního řádu, jejíž jediný prvek je totožný s jediným vlastní číslem – „spektrální norma“ zde splývá s „euklidovskou normou“. Některé další vlastnosti zmiňovaných norem nám přiblíží následující příklad; musíme si však uvědomit, že pracnost výpočtu $||A||$ by značně narůstala u obecně nesymetrických matic A (pro ilustraci by stačilo použít matici A z příkladu 7.1).

Příklad 7.7: Pro matici A a vektory b a x z příkladu 7.5 vypočtěte normy $\|A\|$, $\|A\|_*$, $\|b\|$ a $\|x\|$, následně porovnejte čísla $\|b\|$, $\|A\|.\|x\|$ a $\|A\|_*.\|x\|$ a zjistěte, zda obdobné vztahy platí mezi těmito čísly i pro libovolnou matici $A \in R^{n\times n}$, kde $n \in \{1, 2, \ldots\}$ takovou, že matice $A^T.A$ má n různých vlastních čísel, a pro libovolné vektory x a $b = A.x$ z R^n.

Řešení: Snadno vypočteme

$$\|A\|_* = \sqrt{7^2 + 4.2^2 + 2.4^2 + 2.1^2} = \sqrt{99} = 3.\sqrt{11} \approx 9,94987437\,,$$

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 2.1^2} = \sqrt{6} \approx 2,44948974\,,$$
$$\|b\| = \sqrt{2.5^2 + 4^2} = \sqrt{66} = \sqrt{6}.\sqrt{11} \approx 8,12403840\,,$$
$$\|A\|_*.\|x\| = 3.\sqrt{11}.\sqrt{6} \approx 24,37211521\,.$$

Pokusíme se nyní uplatnit znalost největšího vlastního čísla $\lambda = 9$ a příslušného vlastního vektoru v naší matice A z příkladu 7.2. Poněvadž je $A^T = A$, platí

$$(A^T.A).v = A.(A.v) = \lambda.(A.v) = \lambda^2.v\,;$$

$\lambda^2 = 9^2$ je tedy největším vlastním číslem matice $A^T.A$, v důsledku čehož $\|A\| = 9$. Dostáváme tak

$$\|A\|.\|x\| = 9.\sqrt{6} \approx 22,04540769\,.$$

Vidíme tedy, že platí

$$\|b\| < \|A\|.\|x\| < \|A\|_*.\|x\|\,.$$

V obecném případě se pokusíme dokázat aspoň

$$\|b\| \leq \|A\|.\|x\| \leq \|A\|_*.\|x\|\,;$$

přitom je zřejmě $\|b\| = \|A.x\|$. Přímým výpočtem, v němž vystupují prvky a_{ij} čtvercové matice A ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$) dostáváme

$$\|b\| = \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left((a_{j1}x_1)^2 + \ldots + (a_{jn}x_n)^2\right)\,.$$

Jelikož však podle Schwarzovy nerovnosti v R^n (z věty 6.1) pro libovolné $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$(a_{j1}x_1)^2 + \ldots + (a_{jn}x_n)^2 \leq (a_{j1}^2 + \ldots + a_{jn}^2).(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\,,$$

dostáváme dále

$$\|b\| \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{j1}^2 + \ldots + a_{jn}^2).(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \|A\|_*^2.\|x\|^2\,.$$

Je tedy $||A.x|| \leq ||A||_*.||x||$. Označme nyní $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice $A^T.A$ a $v_1, \ldots, v_n$ jim příslušné vlastní vektory. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $||A||^2 = \lambda_1 > \ldots > \lambda_n \geq 0$. Podle věty 7.2 tvoří vektory $v_1, \ldots, v_n$ ortogonální bázi prostoru R^n, takže $x = \alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_n.v_n$ pro nějaké reálné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, takže platí

$$||A.x||^2 = x^T.A^T.A.x = (\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_n.v_n)^T.A^T.A.(\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_n.v_n) =$$

$$(\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_n.v_n) \bullet (\lambda_1.\alpha_1.v_1 + \ldots + \lambda_n.\alpha_n.v_n) \leq$$
$$\lambda_1^2 \left((\alpha_1.v_1)^2 + \ldots + (\alpha_n.v_n)^2 \right) = ||A||^2.||x||^2 .$$

Z konstrukce tohoto odhadu je zřejmé, že nelze najít menší číslo $\mu \in R$, pro které by platilo $||A.x|| \leq \mu.||x||$ nezávisle na výběru $x \in R^n$, než právě $\mu = \lambda_1 = ||A||$. Totéž nelze obecně říci o předchozím odhadu, založeném na Schwarzově nerovnosti, s $\mu = ||A||_*$. Dospíváme tedy k očekávanému závěru $||A|| \leq ||A||_*$.

Všimněme si ještě, že v předchozím příkladu jsme potřebovali, abychom mohli použít větu 7.2, obtížně ověřitelný předpoklad o existenci n různých vlastních čísel symetrické matice $A^T.A$, která jsou přitom podle věty 7.3 nutně reálná. To nás navádí k otázce, není-li tento předpoklad zbytečný. Kladná odpověď na tuto otázku se opírá o následující větu, která (zdánlivě nepatrně) zobecňuje větu 7.2. Její (poměrně komplikovaný) důkaz tu uvádíme hlavně proto, abychom získali představu o důkazových technikách používaných v teorii matic a lineárních operátorů.

Věta 7.5: Nechť A je symetrická matice z $R^{n\times n}$, kde $n \in N$. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (některá se mohou opakovat) všechna vlastní čísla matice A, lze k nim najít odpovídající vlastní vektory $v_1, \ldots, v_n \in R^n$ tak, že každé dva z nich jsou vzájemně ortogonální.

Důkaz: S přihlédnutím k větě 7.2, kterou zobecňujeme, stačí ukázat, že existuje taková matice $V \in R^{n\times n}$, jejíž sloupce tvoří ortonormální bázi prostoru $R^{n\times n}$, a taková matice $\Lambda \in R_D^{n\times n}$ (obdobně jako v příkladu 7.5), že platí $V^T.A.V = \Lambda$; matice V přitom sestává postupně ze sloupců $v_1, \ldots, v_n$ a matice Λ z čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Z věty 7.3 je přitom zřejmé, že $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou reálná čísla; je tedy rozumné hledat $v_1, \ldots, v_n \in R^n$. Důkaz provedeme úplnou matematickou indukcí. V nejjednodušším případě, kdy za n dosadíme 1, věta evidentně platí: stačí zvolit $v_1 = 1$ a λ_1 identické s jediným prvkem matice A. Předpokládejme, že věta platí také v případě, že n zaměníme za $n - 1$. Uvažujme nějaké vlastní číslo λ a jemu odpovídající vlastní vektor v původní matice $A \in R^{n\times n}$. Označme U matici z $R^{n\times n}$ složenou postupně z vektorů $v, w_1, \ldots, w_{n-1}$ takových, že uspořádaná množina $\{v, w_1, \ldots, w_n\}$ tvoří ortonormální bázi prostoru R^n (srov. postup konstrukce takové báze v příkladu 6.2). Pak platí

$$v^T.A.v = \lambda.||v||^2 = \lambda ,$$

a pro libovolné $j \in \{1, \dots, n-1\}$ též

$$w_j^T.A.v = \lambda.w_j^T.v = 0\,, \quad v^T.A.w_j = v^T.A^T.w_j = (A.v)^T.w_j = \lambda.v^T.w_j = 0\,.$$

Ze součinů $w_j^T.A.w_k$ pro libovolné $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$ můžeme vytvořit jistou symetrickou matici $B \in R^{(n-1)\times(n-1)}$. Podle indukčního předpokladu ovšem pro tuto matici již platí

$$P^T.B.P = \Omega\,,$$

kde $\Omega \in R_D^{(n-1)\times(n-1)}$. a sloupce matice $P \in R^{(n-1)\times(n-1)}$ generují ortonormální bázi prostoru $R^{(n-1)\times(n-1)}$. Zavedeme-li tedy nové matice $U, W \in R^{n\times n}$ předpisem

$$C = U^T.A.U\,, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P \end{bmatrix}\,,$$

kde o je nulový vektor z $R^{(n-1)\times(n-1)}$, dostaneme postupně

$$C = U^T.A.U = \begin{bmatrix} \lambda & o^T \\ o & B \end{bmatrix}\,,$$

$$(U.W)^T.A.(U.W) = W^T.C.W = \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & o^T \\ o & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P^T.B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & P^T.B.P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o^T \\ o & \Omega \end{bmatrix}\,.$$

Matice

$$V = U.W\,, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & o^T \\ o & \Omega \end{bmatrix}$$

z prostoru R^n pak už mají požadované vlastnosti.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 7.8: Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Najděte všechna taková komplexní čísla α, pro něž má maticová rovnice

$$A.x + \alpha^2.x = \alpha.x$$

nějaké netriviální řešení.

Výsledek: Může být $\alpha = 1/2 \pm i.\sqrt{3}/2$ nebo $\alpha = 1/2 \pm i.\sqrt{7}/2$.

Příklad 7.9: Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matici A^{-100} (což je zkrácený zápis pro $(A^{-1})^{100}$) rozložte do tvaru $A^{-100} = V^T.\Lambda.V$, v němž Λ je diagonální matice z $R^{3\times 3}$ s postupně klesajícími diagonálními prvky a sloupce matice V tvoří ortonormální bázi R^3.

Výsledek: Pro volitelná $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$ je celkem 8 řešení

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/3^{100} & \\ & & 1/4^{100} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \varepsilon_1/\sqrt{10} & 3.\varepsilon_2/\sqrt{14} & -3.\varepsilon_3/\sqrt{35} \\ 0 & 2.\varepsilon_2/\sqrt{14} & 5.\varepsilon_3/\sqrt{35} \\ 3.\varepsilon_1/\sqrt{10} & -\varepsilon_2/\sqrt{14} & \varepsilon_3/\sqrt{35} \end{bmatrix}.$$

Příklad 7.10: O čtvercové symetrické matici třetího řádu A se dochovaly jen kusé informace: v levém horním rohu matice A je největší číslo, v pravém dolním rohu matice A je celé číslo a navíc matice $(A-2.I)^{-1}$, kde I je jednotková matice třetího řádu, má vlastní čísla 1, 1/2 a 1/3, kterým postupně přísluší vlastní vektory $[1, 1, 2]^T$, $[1, -1, ?]^T$ a $[?, ?, ?]^T$. Pokuste se rekonstruovat matici A.

Výsledek: Existuje jediné řešení

$$A = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{12} & 3/2 & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

8 Ukázka kontrolního testu

Na závěr zařazujeme ukázku kontrolního testu sestaveného ze čtyř příkladů. (Při skutečné zkoušce by samozřejmě chyběly informace o výsledcích.)

Příklad 7.1: Zjistěte, tvoří-li pro některé předepsané číslo $\alpha \in R$ množina všech polynomů f z prostoru P_2 splňujících podmínku $f(0) = \alpha$ lineární podprostor prostoru P_2. Pokud ano, zjistěte jeho dimenzi a navrhněte jeho bázi.

Výsledek: Musí být $\alpha = 0$ (z podmínky a) v definici 1.1). Příslušný lineární podprostor prostoru P_2 má dimenzi 2; jeho bází je např. množina $\{f_1, f_2\}$, kde f_1 a f_2 jsou polynomy zavedené pro každé $x \in R$ předpisem $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

Příklad 7.2: O vektorech $u, v \in R^7$ je známa pouze následující vágní informace: buď $||u|| = 2$, $||v|| = 4$ a $||u - v|| = 6$ nebo $||u|| = 6$, $||v|| = 4$ a $||u - v|| = 2$. Vypočtěte $A = u \bullet (u - v)$.

Výsledek: První alternativa je nesmyslná (narušuje podmínku c) v definici 4.1). Ze druhé alternativy vychází $A = 12$.

Příklad 7.3: Jsou dány vektory $u = a - 5.b + 3.\alpha.c$ a $v = a - \alpha.b - c$, přičemž $||a|| = 2$, $||b|| = ||c|| = 1$, $\{a, b, c\}$ je pozitivní ortogonální báze R^3 a α je reálný parametr. Najděte takové α a následně i vhodné $w \in R^3$, aby $\{u, v, w\}$ byla negativní ortogonální báze R^3.

Výsledek: Musí být $\alpha = -2$; přitom $w = \beta.(17.a - 20.b + 28.c)$, kde β je libovolné záporné číslo.

Příklad 7.4: Najděte všechny takové vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

jejichž první složka je rovna 1.

Řešení: Matice A má vlastní čísla 3, 2 a -2; ke každému z nich lze najít vlastní vektor požadované vlastnosti. Postupně tak vycházejí vlastní vektory $[1, 1, 1]^T$, $[1, 0, -3]^T$ a $[1, -4, 1]^T$.

Příklad 7.3: Jsou dány vektory $u = a - 5.b + 3.\alpha.c$ a $v = a - \alpha.b - c$, přičemž $||a|| = 2$, $||b|| = ||c|| = 1$, $\{a, b, c\}$ je pozitivní ortogonální báze R^3 a α je reálný parametr. Najděte takové α a následně i vhodné $w \in R^3$, aby $\{u, v, w\}$ byla negativní ortogonální báze R^3.

Výsledek: Musí být $\alpha = -2$; přitom $w = \beta.(17.a - 20.b + 28.c)$, kde β je libovolné záporné číslo.

Úspěšné vyřešení těchto příkladů signalizuje potřebný stupeň osvojení pojmů a postupů z teorie lineárních prostorů a operátorů. Získané znalosti budou vzápětí užitečné (i když zpočátku jen ve velmi speciálním lineárním prostoru R^3) při studiu lineárních (a později i nelineárních) geometrických útvarů v R^3; tomu se tradičně věnuje (s využitím dalších operací s vektory, specifických pro prostor R^3) analytická geometrie. Jejími základními úlohami se zabývá navazující elektronický učební text [1].

Použitá a doporučená literatura

[1] Chrastinová, V. *Operace s vektory a analytická geometrie*, elektronický učební text pro podporu kombinovaného studia, FAST VUT Brno 2004.

[2] Dalík, J. *Numerické metody*, CERM Brno 1997.

[3] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E., *Sbírka příkladů z matematiky I*, CERM Brno 1994.

[4] Budínský, B., Charvát, J. *Matematika I*, SNTL Praha 1987.

[5] Fiedler, M. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL Praha 1981.

[6] Hefferon, J. *Linear Algebra*, elektronický učební materiál dostupný na adrese http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/, Saint Michael's College Colchester, Vermont (USA) 2003.

[7] Nekvinda, M., Šrubař, J., a Vild, J. *Úvod do numerické matematiky*, SNTL Praha 1976.

[8] Novotný, J. *Matematika* I 4 *(Lineární algebra)*, CERM Brno 1995.

[9] Ralston, A. *Základy numerické matematiky*, Academia Praha 1973.

[10] Tryhuk, V. *Matematika* I 2 *(Reálná funkce jedné reálné proměnné)*, CERM Brno 1995.

[11] Zindulka, O. *Vektorová pole*, elektronický učební materiál dostupný na adrese http://mat.fsv.cvut.cz/zindulka/teaching/main.pdf, Stavební fakulta ČVUT Praha 1999.

[12] Škrášek, J., Tichý, Z. *Základy aplikované matematiky I*, SNTL Praha 1983.

Rejstřík